Appunti di gnomonica

COMMENTARIO ALLE FORMULE DEL FANTONI

A CURA DI ANTONIO GIORGI

15ª edizione *(29 giugno 2010)*

[antonio.giorgi@arsgnomonica.com]
Osservazioni, suggerimenti, segnalazioni di errori
e di imprecisioni saranno graditi

Indice

Introduzione

Ambito, definizioni

Queste pagine non mirano di certo a voler costituire un'opera completa di gnomonica (ne esistono di ben più autorevoli), ma vogliono essere, senza presunzione alcuna, un *commentario*, una *ricognizione minuziosa*[1] sull'applicazione[2] di quella manciata di formule che sono alla base del calcolo di un orologio solare, secondo l'approccio *matematico* (contrapposto al procedimento *geometrico*) illustrato dall'amm. Fantoni nel suo monumentale trattato[3], al quale doverosamente rimandiamo per ogni approfondimento.
Gli orologi solari presi in considerazione[4], pertanto, non saranno tutti quelli concepiti dall'uomo attraverso le diverse epoche e le diverse civiltà, non apparterranno a tutte le tipologie, ma saranno semplicemente gli orologi solari più comuni, quelli più diffusi nella nostra cultura: gli orologi *piani*, ad *angolo orario*, a *stilo polare*, ad *ore vere, locali, moderne*.

> Più in particolare, l'ambizioso obiettivo dei presenti appunti è quello di esaminare, con il maggior approfondimento possibile, il *comportamento* di ciascuna grandezza, incognita, variabile coinvolta nel calcolo gnomonico, dalla presentazione della corrispondente formula generale, ai valori limiti, alle eccezioni, ai casi particolari ed a quelli impossibili, coprendo tutta la casistica, fugando ogni dubbio e spiegando ogni passaggio.

Visto il dichiarato limite di questa modesta opera, dunque, non si svilupperanno approfondimenti su argomenti come le *lunghezze d'ombra*, l'*illuminazione*, le ore *italiche* e *babiloniche* ecc., tutti argomenti trattati ampiamente nel testo dell'ammiraglio[5].

---

[1] Per chiarire alcuni passaggi meno chiari, per colmare qualche lacuna, per correggere qualche inesattezza.

[2] E non sul significato o sull'origine, che si rifanno con evidenza all'astronomia ed alla trigonometria sferiche, e che qui non si mettono in discussione.

[3] G. Fantoni. *Orologi solari.*

[4] Riguardo al calcolo, non agli aspetti concreti della realizzazione (materiali, tecniche ecc.).

[5] Rispettivamente nei capp. VIII, X, XVIII.

Date per scontate le nozioni base di gnomonica, astronomia, geometria o matematica, si esamineranno gli elementi particolari necessari al calcolo di un orologio solare via via che compariranno nella trattazione. Le convenzioni sull'uso dei segni, sul verso di misurazione degli angoli, sugli assi di riferimento ecc. verranno sempre specificate con chiarezza lungo la trattazione.
Ricordiamo qui la distinzione tra il concetto di *direzione* e quello di *verso* (che poi è analogo a quello tra *retta* e *semiretta*), importante ai fini di un corretto uso delle formule che seguiranno. Dato che le linee che andremo a calcolare ed a tracciare sul quadrante dell'orologio sono semirette, ecco che descriverne la direzione come rette intere (ottenibile da molte formule) spesso non è sufficiente a consentirne una costruzione certa; occorre infatti dare anche un verso alla retta (come nei vettori), conoscere cioè quale delle due semirette dobbiamo considerare. Perciò, come vedremo, sarà spesso necessario qualche passaggio aggiuntivo per risolvere l'ambiguità ed individuare univocamente l'angolo cercato.
Infine, nel parlare di *quadro* (o di quadrante) dell'orologio, si tenga presente che lo si distingue dal *piano*, che pure lo contiene: una cosa infatti è il piano, che presenta due facce, opposte tra loro, ed una cosa, appunto, è il quadro (o quadrante), che corrisponde ad una singola e specifica faccia del piano. Analogamente quando si parla di *semispazio* del quadro, s'intende quello (tra i due in cui lo spazio è tagliato dal piano) che si trova dalla parte del quadro, verso cui il quadro è rivolto.

Dati

I dati assolutamente fondamentali, da acquisire preliminarmente, per calcolare un orologio solare sono:

- la **latitudine** φ del luogo [dall'*equatore* (0°), negativa a sud e positiva a nord, variabile tra −90° e +90°];

- l'**inclinazione i** del quadro [dalla *posizione verticale* (0°), negativa verso il basso (il semispazio del quadro contiene il *nadir*) e positiva verso l'alto (il semispazio del quadro contiene lo *zenit*), variabile tra −90° e +90°[6]].

L'altro dato, in teoria non fondamentale, ma in realtà quasi sempre necessario, quando cioè il quadro *non* è orizzontale, è:

- la **declinazione d** del quadro [da *sud* (0°), negativa ad est e positiva ad ovest, variabile tra −180° e +180°].

Opzionalmente, poi, possono essere necessari altri dati:
- la **longitudine λ** del luogo [dal *meridiano di Greenwich* (0°), negativa a ovest e positiva ad est[7], variabile tra −180° e +180°], se si vuole calcolare un orologio non ad ore locali, ma ad ore "del fuso", cioè riferite ad un meridiano diverso da quello locale[8];
- la **lunghezza l** dello stilo, se si vorranno calcolare le linee diurne per usare l'orologio anche come "calendario"[9], oppure la sua **sporgenza g** (lunghezza dell'ortostilo, o distanza dello stilo dal quadro negli orologi polari), per calcolare le linee orarie negli orologi polari[10].

Ci sarebbe da aggiungere, poi, una considerazione su un caso del tutto particolare (in realtà, però, a dir poco irreale ed improbabile!): quello di un orologio al polo…
Per prevedere tutta la casistica e completare come si deve la teoria, infatti, non possiamo trascurare la possibilità che si debba calcolare un orologio esattamente sul polo[11], anche se a nessuno mai verrà in mente di cimentarsi in un'avventura tanto inutile e stramba!
In quel caso[12], com'è facile immaginare, si verificano una serie di condizioni estreme che, in pratica, quasi obbligano ad adottare accorgimenti ed *escamotage*

---

6 In realtà, pur essendo un quadro geometricamente orizzontale anche *a faccia in giù*, cioè con $i = -90^\circ$, in gnomonica non avrebbe senso: sarebbe un orologio mai funzionante. Perciò sia $-90^\circ < i \leqslant +90^\circ$.
7 Secondo la convenzione gnomonica piuttosto che secondo quella astronomica.
8 Sistema non trattato nei presenti Appunti (vedi G. Fantoni. *Orologi solari*, cap. XII).
9 Sistema non trattato nei presenti Appunti (vedi G. Fantoni. *Orologi solari*, capp. VII-IX).
10 Vedi a pag. 46.
11 Sud, "preferibilmente", visto che su quello nord si tratterebbe di *lavorare*, come se non bastasse, su ghiacci alla deriva!
12 Che esamineremo più dettagliatamente nel corso della trattazione.

(comunque del tutto leciti matematicamente), per superare ambiguità e passaggi critici.
In sostanza il problema si può riassumere così:

- sul polo la longitudine perde significato, è indeterminata, anzi potremmo dire che incontriamo tutte le longitudini contemporaneamente;
- il sud (se siamo sul polo nord) è dovunque intorno a noi, e il nord perde significato (il contrario al polo sud);
- l'est e l'ovest svaniscono, oppure sono dovunque anch'essi (sempre comunque opposti tra loro ed a 90° di azimut dal sud/nord);
- non c'è un meridiano locale, oppure ce ne sono infiniti (come per la longitudine);
- perciò il Sole[13] non transita mai, o è sempre in transito: quindi o non è mai mezzogiorno, o lo è sempre;
- non vige un fuso orario particolare, o sono tutti in vigore contemporaneamente, e quindi non possiamo dire *che ora è*, o possiamo dire che *sono tutte le ore* contemporaneamente;
- e così via…

Ovviamente stiamo descrivendo una situazione paradossale, da *incubo*, dalla quale è tuttavia possibile (e consigliabile!) uscire adottando una convenzione, scegliendo di seguire una regola.
La convenzione che adottiamo è la seguente.

> Al polo si scelga, tra le infinite presenti e possibili, una longitudine di *riferimento*, un meridiano *locale*, per stabilire l'istante del transito, ed inoltre individuare la direzione dei punti cardinali (il sud, innanzitutto, se siamo a nord, e viceversa).
> In particolare, se il quadro non è orizzontale, la longitudine ed il meridiano locale siano quelli verso cui "guarda" il quadro, tali cioè che la declinazione di esso sia 0°, ed il meridiano perciò indichi il sud (se siamo a nord, mentre sia 180° ed indichi il nord se siamo a sud). [0.1]
> Se il quadro invece è orizzontale (orologio equatoriale), mancando la declinazione, possiamo scegliere una longitudine ed

[13] Sottinteso sopra l'orizzonte (sei mesi all'anno da quelle parti), condizione necessaria in gnomonica affinché i nostri sforzi abbiano senso…

un meridiano qualsiasi: ad esempio, quelli di Greenwich (0°), o quelli *etnei* (15° E), o quelli di casa nostra ecc.

In questo modo, come si vedrà di volta in volta discutendo i casi particolari, tante ambiguità si risolvono e svaniscono, ed un caso estremo e poco maneggevole come un orologio al polo può essere trattato *quasi* come un caso comune.

Incognite

Le incognite da calcolare per realizzare un orologio solare sono:

- l'**elevazione ε**[14] (*epsilon*) dello stilo [dal *quadro*, negativa quando lo stilo "punta" al polo sud e positiva al polo nord; l'angolo può ricadere nei quadranti I e IV];
- l'**angolo σ** (*sigma*) della sustilare [dall'*asse*[15], positivo in senso antiorario; quadranti I, II, III e IV];
- l'**angolo $P_σ$ al polo** della sustilare [dal *meridiano superiore*[16], negativo ad est e positivo ad ovest; quadranti I, II, III e IV];
- l'**ora $t_σ$** della sustilare [quadranti I, II, III e IV];
- gli **angoli ω** (*omega*) delle linee orarie [dalla *sustilare*, positivi in senso orario; quadranti I, II, III e IV].

[14] Sebbene il simbolo ε sia universalmente usato in astronomia per indicare l'obliquità dell'eclittica, è usato qui per indicare l'elevazione dello stilo, non ritenendo che ci sia rischio di ambiguità o confusione.

[15] La semiretta *superiore* di massima pendenza del quadro negli orologi non orizzontali, oppure il punto cardinale *nord* in quelli orizzontali (in quest'ultimo caso, se l'orologio orizzontale è al polo, ed è perciò anche equatoriale, e si tratta del polo sud, allora l'asse coincide col meridiano *locale* scelto convenzionalmente, mentre al polo nord l'asse coincide col meridiano opposto a quello *locale*).

[16] Considerando che a rigore il *meridiano* è il cerchio massimo celeste passante per i poli e lo *zenit* (e perciò anche il *nadir*), il *meridiano superiore* ne è la metà (delimitata dai poli) che contiene proprio lo zenit.

Formule, casistica, convenzioni

Rimandando per ogni approfondimento al testo di riferimento, diciamo solamente che i dati e le incognite appena elencati concorrono a definire una rappresentazione della sfera celeste in cui gli uni e le altre sono strettamente correlati, costruzione questa che grazie alla trigonometria sferica ed a quella piana e ad una manciata di formule consente di risolvere vari problemi ed individuare le incognite in funzione dei dati.
Considerando un triangolo sferico di angoli α, β, γ, e di lati (archi) ad essi rispettivamente opposti a, b, c, risultano le seguenti relazioni:

Formule dei seni

$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}} \tag{0.2}$$

Formule dei coseni (o di Eulero)

$$\boxed{\begin{aligned}\cos a &= \cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha\\ \cos b &= \cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta\\ \cos c &= \cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma\end{aligned}} \tag{0.3}$$

Formule di Vieta

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a-\cos\beta\cdot\cos\gamma\\ \cos\beta &= \sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos b-\cos\alpha\cdot\cos\gamma\\ \cos\gamma &= \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c-\cos\alpha\cdot\cos\beta\end{aligned}} \tag{0.4}$$

Giova inoltre ricordare le seguenti corrispondenze:

Angoli associati

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(180°-\alpha)\\ -\sin\alpha &= \sin(-\alpha)\\ -\sin\alpha &= \sin(180°+\alpha)\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(-\alpha)\\ -\cos\alpha &= \cos(180°+\alpha)\\ -\cos\alpha &= \cos(180°-\alpha)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= \cos(90°-\alpha)\\ \sin\alpha &= \cos(-90°+\alpha)\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \sin(90°+\alpha)\\ \cos\alpha &= \sin(90°-\alpha)\end{aligned}} \tag{0.5}$$

Ci saranno utili anche le seguenti relazioni:

Formule di Werner:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}\\
\cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}\\
\cos\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}} \qquad [0.6]$$

Aggiungiamo ora alla nostra "attrezzatura" trigonometrica una procedura d'indubbia utilità, che riguarda il calcolo di angoli con la funzione inversa *arcotangente*.

La funzione arcotangente *standard*, nota la tangente di un angolo, consente di ricavare lo stesso fornendolo come valore compreso tra −90° e +90°, cioè appartenente al IV o al I quadrante, considerando però solo una metà dei casi possibili.

Ad esempio, da $\tan\alpha = -3.65$ fornirebbe solo $\alpha = -74.68°$, ignorando il valore, altrettanto lecito e possibile, di $\alpha = +105.32°$: come dire che fornirebbe di sicuro solo la *direzione* cercata, ma senza individuare univocamente anche il *verso*. Ed in molti casi (in realtà quasi sempre) quell'informazione non è sufficiente, è incompleta.

Ecco perché, in certe circostanze[17], è possibile (e preferibile) utilizzare una versione per così dire *evoluta* della funzione arcotangente, che è in grado di indicare senza dubbi o incertezze l'angolo corretto, tra i due reciprocamente opposti: l'utilità di una simile funzione è tale che in alcune calcolatrici, in molti programmi di calcolo e linguaggi di programmazione per computer essa è disponibile, in aggiunta all'arcotangente standard (di solito indicata con *atn*, *atan* o *arctan*), ed è chiamata a volte *arcotangente2* (indicata con *atn2*, *atan2*, o *arctan2*).

[17] Quando cioè si cerca di orientare una semiretta, come una linea oraria, e quindi si sa per certo che l'angolo che si sta cercando può avere qualunque ampiezza, da 0° a 360°, e non essere perciò limitato solo ad uno o due quadranti.

Il suo funzionamento si basa sul semplice principio seguente:

se l'argomento della funzione è il quoziente di una frazione, se ne calcoli la normale arcotangente, poi, se il valore del denominatore è di segno negativo[18], si scelga l'angolo opposto, cioè si sommino o sottraggano 180° all'angolo calcolato[19].	[0.7]

Ad esempio, se $\alpha = \arctan\left(\frac{+2.19}{-0.60}\right)$, allora $\alpha = -74.68°$, ma poiché $-0.60 < 0$, allora $\alpha = \alpha + 180°$, cioè $\alpha = -74.68° + 180°$, cioè $\alpha = 105.32°$.

Con questo sistema si supera l'ambiguità e si ricava l'angolo corretto.
(Un'eccezione a quanto appena detto è descritta a pag. 52, a proposito del calcolo dell'inclinazione del quadro.)
Può essere altresì utile, trovandosi alle prese con prodotti o quozienti di funzioni che tendono a zero o all'infinito, come la tangente, ricordare quali casi limite possono presentarsi nell'affrontare angoli particolari, e come risolverli.
Ecco i casi che possono presentarsi ed i valori che forniscono:

$\frac{0}{n} = 0$	$\frac{n}{0} = \infty$	$0 \cdot \infty = \text{ind.}$
$\frac{n}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{n} = \infty$	$\frac{0}{0} = \text{ind.}$
$\frac{0}{\infty} = 0$ [20]	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty} = \text{ind.}$

[18] Oppure se i valori del numeratore e del quoziente sono di segno diverso.
[19] Sommare o sottrarre 180° ad una grandezza angolare è ovviamente la stessa cosa, così come esprimere uno stesso angolo in complemento a 360°, come, ad esempio, −70° o +290°.
[20] $\frac{0}{\infty} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

Ad esempio, dovendo calcolare $\alpha = \arccos\frac{\sin\beta}{\tan\gamma}$, con $\beta = 0°$ e $\gamma = 90°$, dobbiamo rifarci al caso $\frac{0}{\infty}$, essendo perciò $\alpha = \arccos\frac{0}{\infty}$, cioè $\alpha = \arccos 0$, e quindi $\alpha = \pm 90°$.

Dovendo invece calcolare $\alpha = \arctan\frac{\cos\beta}{\tan\gamma}$, con $\beta = 90°$ e $\gamma = 0°$, ci troveremmo di fronte al caso $\frac{0}{0}$, che ci dice che il valore che cerchiamo è indeterminato: questa situazione, per quanto riguarda i nostri calcoli, significa semplicemente che l'angolo che ci interessa può assumere qualunque ampiezza (vedi anche la tabella di pag. 51).

Nei capitoli seguenti la descrizione del calcolo degli orologi avviene considerando ed illustrando, incognita per incognita, formula per formula, dapprima il caso generico degli orologi comunque orientati, inclinati e declinanti, poi i casi particolari degli orologi *orizzontali*, *verticali*, *polari*[21], *equatoriali*[22], che per il verificarsi di condizioni limite possono richiedere l'uso di formule specifiche, alternative a quelle generali.

Prima di procedere col calcolo delle incognite, perciò, è opportuno individuare la *tipologia* in cui rientra l'orologio che si sta studiando, per poter scegliere così quali formule adoperare, e fronteggiare le situazioni critiche che dovessero eventualmente presentarsi, e non incappare in casi indeterminati o impossibili da risolvere.

---

21 Il cui piano è parallelo all'asse polare terrestre, quindi allo stilo.

22 Il cui piano è parallelo al piano equatoriale terrestre, ed al quale quindi è perpendicolare l'asse polare, e perciò lo stilo.

Per far ciò è sufficiente definire innanzitutto i 4 casi particolari di orologio individuati dal verificarsi di certe combinazioni di valori che i dati di partenza (φ, i, d) possono assumere:

<table>
<tr><td colspan="3">$i = +90°$</td><td>O. orizzontale[23]</td><td rowspan="4">Casi particolari</td></tr>
<tr><td colspan="3">$i = 0°$</td><td>O. verticale</td></tr>
<tr><td>$\cos d - \tan\varphi \cdot \tan i = 0$</td><td>$\begin{cases} i = 0° \\ \varphi = \pm 90° \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} i = +90° \\ \varphi = 0° \end{cases}$</td><td>O. polare[24]</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} i = +90° \\ \varphi = \pm 90° \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} i = \varphi \\ d = 180° \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} i = -\varphi \\ d = 0° \end{cases}$</td><td>O. equatoriale</td></tr>
</table>

Bisogna notare che i casi particolari possono sovrapporsi e combinarsi in vari modi, e che in caso di identità *multipla* la tipologia elencata più *in basso* nella tabella precedente (nell'ordine *orizzontale–verticale–polare–equatoriale*) è quella che comanda.

Ecco perciò che:

- un orologio verticale può essere considerato *polare* quando declina ad est o ad ovest (e non è al polo), ed andrà calcolato così (quadro *meridiano*);
- un orologio verticale può ancora essere *polare*, se è al polo, e così sarà calcolato;
- anche un orologio orizzontale all'equatore è da considerare *polare*, e come tale verrà calcolato;
- un orologio orizzontale al polo sarà calcolato come *equatoriale*;
- anche un orologio verticale può essere *equatoriale*, se è all'equatore e diretto a sud o a nord, e come tale sarà calcolato;
- infine un orologio inclinato, apparentemente generico, può rivelarsi *polare* o *equatoriale*: si considereranno perciò questi casi.

---

[23] Come riportato anche altrove (vedi note 6, 29 e 33) non si considera l'orologio orizzontale in cui $i = -90°$.

[24] Si noti che la prima condizione, quella generale, qui presentata, da sola non copre tutta la relativa casistica. Ci sono infatti due situazioni particolari che rendono incerto l'esame: sia quando l'orologio è al polo ed è verticale, sia quando è all'equatore ed è orizzontale, il prodotto delle tangenti diventa indeterminato. Per questo si è resa necessaria l'esplicita notifica delle due condizioni particolari.

In base alle definizioni delle 5 tipologie (o. generico + casi particolari) ed ai criteri di catalogazione, si può quindi classificare l'orologio da calcolare, in base ai valori della *latitudine*, dell'*inclinazione* e della *declinazione*.
Una volta individuato in maniera certa il tipo di orologio allo studio, si può passare all'applicazione delle relative formule e calcolare così le incognite: ε, σ, P_σ, t_σ, ω.
Nell'illustrare i procedimenti di calcolo di ciascun'incognita, verranno presentate via via formule e tabelle che concorrono ad individuare i valori cercati. Lungo tutta l'esposizione sia le formule, sia le tabelle, sia i valori sono presentati tipograficamente con un aspetto che ha un preciso significato.
Le formule che servono a calcolare le incognite, o a modificarle, sono contrassegnate da caselle con un fondo *giallo* ed un bordino *marrone* (es. $\boxed{\sigma' = \sigma - 360°}$): esse costituiscono infatti i passaggi più *attivi*, per così dire, della trattazione.
Le condizioni da verificare per effettuare delle scelte, o che semplicemente si manifestano, sono riconoscibili dal fondo *lilla* (es. $\operatorname{sgn}\varphi = \operatorname{sgn}(\cos d)$).
Invece il resto (considerazioni, casistica ecc.) rimane su fondo *bianco*.
Inoltre i valori che ogni incognita può assumere in seguito a ciascun passaggio (dalla formula, o in seguito alle eventuali correzioni successive), possono essere di due tipi, a seconda del grado di *definizione* dei valori cercati.
Così ambiti *provvisori*, come magari quelli inizialmente consentiti da una formula, verranno contraddistinti dal fondo *grigio* (es. $0° \leqslant \sigma < +90°$), mentre un fondo *verde* indicherà i valori e gl'intervalli *definitivi* possibili per l'incognita, ottenuti magari in seguito a controlli e verifiche (es. $0° < |\varepsilon| < 90°$).
Completano lo studio, in ciascun capitolo, per ciascun'incognita, per ciascuna formula, per ciascun caso, generale e particolare, raccolte di esempi che mostrano in pratica l'applicazione dei procedimenti di calcolo via via discussi.
Alla fine del presente trattato (da pag. 54) un quadro riassuntivo raccoglie tutte le formule, in maniera sintetica ma chiara e completa (il *prontuario* vero e proprio, per una rapida consultazione), presentandole sia formula per formula, incognita per incognita (secondo le colonne delle tabelle), sia caso per caso, orologio per orologio (secondo le righe).
Infine (da pag. 56) un'utile raccolta di peculiarità degli orologi solari.

Ringraziamenti

Anche il redigere un trattatello come questo impegna non poco il volenteroso autore: oltre che sulle proprie forze, infatti, egli non può non contare sull'appoggio altrui, senza il quale finirebbe nell'errore o alla resa.
Il ringraziamento più grande, perciò, va naturalmente all'amm. Fantoni, autore di quella già citata *bibbia* gnomonica senza la quale molti di noi non sarebbero qui oggi.
Un altro ringraziamento va poi ai colleghi ed agli amici i cui suggerimenti preziosi sono stati d'aiuto per superare i passaggi matematici più critici, e per snellire le procedure più contorte. Un nome spicca su tutti gli altri: quello dell'impareggiabile Gianni Ferrari ☺.

Buona lettura

Cap. I – L'elevazione ε dello stilo

Formule

L'angolo ε[25] misura l'elevazione dello stilo dal quadro, anzi, per essere precisi (come si spiegherà più sotto, nelle Considerazioni), misura l'*altezza*[26] dell'estremità *nord* dello stilo[27] sul quadro.
Considerando il triangolo sferico in cui sia

$$\boxed{\begin{array}{l}\gamma = 180° - d \\ a = 90° - i \\ b = 90° - \varphi \\ c = 90° - \varepsilon\end{array}},$$

si ha (dalle [0.3])

$$\boxed{\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma},$$

cioè (dalle [0.5])

$$\boxed{\varepsilon = \arcsin\left(\sin i \cdot \sin\varphi - \cos i \cdot \cos\varphi \cdot \cos d\right)}. \qquad [1.1]$$

Essendo l'angolo dato per seno, sarebbe sempre $-90° \leqslant \varepsilon \leqslant +90°$, ma occorre distinguere: senza bisogno di analizzare la formula, sappiamo già che gli $0°$ caratterizzano gli orologi polari (vedi nota 21), trattati a pag. 17, mentre i $\pm 90°$ quelli equatoriali (vedi nota 22), trattati a pag. 18, per cui nel caso di orologio *inclinato generico* è sempre $0° < |\varepsilon| < 90°$.

[25] Vedi nota 14.

[26] Da interpretarsi nel vero senso della parola: se l'altezza è positiva l'angolo indica effettivamente un'altezza, un'elevazione, sopra al quadro, davanti ad esso; se viceversa è negativa il valore assoluto dell'angolo indica un abbassamento, sotto, dietro al quadro.

[27] Lo stilo, infatti, in quanto polare, cioè parallelo all'asse polare terrestre, ed in quanto asta con due estremità, ne punterà una verso il polo nord celeste ed una verso quello sud; non ha importanza quale delle due sia quella libera, che si allontana dal quadro, e quale quella "murata", o comunque che tende verso il quadro: in ogni caso punteranno ciascuna verso un polo celeste.

Considerazioni

L'angolo effettivo del quale lo stilo si solleva dal quadro è dato ovviamente dal valore assoluto di ε, mentre il segno svolge un'interessante funzione.

> Il segno di ε indica a quale polo celeste lo stilo punta la sua estremità libera: se è + la punta a nord, se è − a sud. [1.2]

Oppure (ma è solo filosofia…) si potrebbe considerare ε come l'angolo tra il quadro e l'estremità dello stilo *comunque* rivolta al polo nord celeste: se l'angolo è positivo vuol dire che l'estremità che punta al polo nord è quella libera, che esce dal quadro, mentre se è negativo vuol dire che l'estremità che punta al polo nord è quella nascosta, che entra nel quadro (e di conseguenza quella libera punta al polo sud celeste).
In ogni caso il polo celeste verso cui punta lo stilo (la sua estremità libera) è "visto" anche dal quadro (è nel suo semispazio), mentre il polo opposto gli è "alle spalle". Questo concetto si può esprimere anche dicendo che il "polo" del quadro, il suo "zenit", insomma la sua normale, è nell'emisfero celeste del polo in questione.
Per verificare ora l'affermazione [1.2] partiamo da una considerazione, forse non molto evidente, ma inconfutabile:

> dato un quadro (a latitudine φ) comunque orientato, inclinato e declinante, non orizzontale, a pensarci bene deve sempre esistere un punto della Terra (a latitudine φ_1[28]) dove esso, se traslato, diventi orizzontale[29].

Immaginiamo di compiere l'operazione: traslando il quadro nell'ipotetica località si trasla anche lo stilo e, non essendoci rotazioni nello spostamento, è sottinteso che la posizione reciproca dei due elementi, cioè ε, rimane immutata.

[28] Al fine di comprendere fino in fondo quanto andiamo a dimostrare, non si dimentichi che tale località può trovarsi in qualsiasi punto della Terra, naturalmente, sia a nord che a sud dell'equatore, a seconda dell'orientamento del quadro.
[29] Naturalmente dicendo *orizzontale* sottintendiamo *zenitale*, con la faccia cioè rivolta in alto, allo zenit, appunto (essendo assurdo un orologio orizzontale rivolto al *nadir*. Vedi anche le note 6 e 33).

Ora, essendo il quadro diventato orizzontale (nella nuova località), giova ricordare che

> l'altezza del polo nord celeste sull'orizzonte di qualsiasi luogo è uguale alla latitudine locale[30].

E l'altezza del polo nord celeste sull'orizzonte non è forse l'elevazione dell'estremità nord dello stilo sul quadro (qui orizzontale), cioè quella che per brevità chiamiamo "elevazione dello stilo"? Possiamo allora scrivere: $\varphi_1 = \varepsilon$.
Quest'uguaglianza, a guardare bene, equivale a dichiarare che l'altezza del polo nord celeste sul quadro (traslato o meno, non importa: l'orientamento non cambia) è uguale all'angolo calcolato con la [1.1], con tanto di segno: cioè ε è positivo se l'altezza del polo nord celeste sul quadro è positiva, quindi se il polo nord celeste è visto dal quadro e puntato dallo stilo (dalla sua estremità libera), ed al contrario, ε è negativo se l'altezza del polo nord celeste sul quadro è negativa, cioè se il polo nord celeste è dietro al quadro (sotto all'orizzonte di φ_1), e quindi ad essere visto dal quadro e puntato dallo stilo (dalla sua estremità libera) è il polo sud celeste.
Questo dimostra la veridicità della [1.2].
Inoltre, a ben guardare, un'altra interessante proprietà di ε, legata al meccanismo appena descritto, è che

> ε corrisponde proprio all'ipotetica latitudine φ_1 alla quale il nostro quadro, traslato, diventa orizzontale.

Chiarito il significato di ε e del suo segno, analizziamo la formula per vedere quando, a latitudini "umane" ($|\varphi| \neq 90°$) ed in un orologio inclinato ($0° < |i| < 90°$), l'angolo è negativo, quando è nullo e quando è positivo: per essere $\varepsilon < 0°$ dev'essere anche $\sin\varepsilon < 0$, per essere $\varepsilon = 0°$ dev'essere $\sin\varepsilon = 0$, e per essere $\varepsilon > 0°$ dev'essere $\sin\varepsilon > 0$.

[30] Anche a sud dell'equatore, dove l'altezza sull'orizzonte diventa "bassezza", cioè negativa, come la latitudine, appunto.

Affinché sia $\sin\varepsilon < 0$, dev'essere $\sin i \cdot \sin\varphi - \cos i \cdot \cos\varphi \cdot \cos d < 0$, cioè dev'essere $\sin i \cdot \sin\varphi < \cos i \cdot \cos\varphi \cdot \cos d$; quindi, dividendo per $\cos i \cdot \cos\varphi$[31] troviamo che quando

$$\tan i \cdot \tan\varphi - \cos d < 0, \tag{1.3}$$

$\varepsilon < 0°$.
Analogamente, dev'essere

$$\tan i \cdot \tan\varphi - \cos d = 0 \tag{1.4}$$

[32] per essere $\varepsilon = 0°$.
Infine, quando

$$\tan i \cdot \tan\varphi - \cos d > 0, \tag{1.5}$$

$\varepsilon > 0°$.
Alle estremità del mondo ($\varphi = \pm 90°$) $\boxed{\operatorname{sgn}\varepsilon = \operatorname{sgn} i \cdot \operatorname{sgn}\varphi}$ (e più in dettaglio, dalla [1.1], sempre valida, $\boxed{\varepsilon = i \cdot \operatorname{sgn}\varphi}$).

Casi particolari

Orologio orizzontale

Posto $i = +90°$[33], si verifica il fatto già discusso poco fa (peraltro riscontrabile dalla semplificazione della [1.1], pur sempre valida), secondo il quale $\boxed{\varepsilon = \varphi}$, che perciò ci garantirebbe sempre che $-90° \leqslant \varepsilon \leqslant +90°$; ma, come nel caso generale, sia gli $0°$ sia i $\pm 90°$ sono da escludere, poiché riconducibili, rispettivamente, agli orologi polari ed a quelli equatoriali (vedi più sotto). Quindi nell'orologio orizzontale è sempre $0° < |\varepsilon| < 90°$, come in quello generico.
E come nell'orologio generico vale la proprietà secondo cui un ε positivo (che ovviamente si ottiene nell'emisfero boreale) indica che lo stilo punta al polo

[31] Sia i che φ variano (senza raggiungerli) da −90° a +90°, quindi i loro coseni sono sempre positivi, e così il loro prodotto: la divisione perciò non cambia il segno della disequazione.
[32] Come ripetiamo, da escludere nel caso generale, in quanto caso particolare che individua l'orologio polare (vedi pag. 17).
[33] Vedi la nota 6.

nord celeste, ed un ε negativo (nell'emisfero australe) indica che punta al polo sud.

Orologio verticale

Se $i=0°$ la [1.1], pur sempre valida, si semplifica in

$$\boxed{\varepsilon=\arcsin\left(-\cos\varphi\cdot\cos d\right)},$$

che come nel caso generale darebbe sempre $-90°\leqslant\varepsilon\leqslant+90°$: ma sia gli $0°$ sia i $\pm90°$ sono da escludersi (porterebbero, rispettivamente, agli orologi polari ed a quelli equatoriali[34]: vedi più sotto), per cui l'intervallo garantito è sempre $0°<|\varepsilon|<90°$.

Riguardo al segno, la formula dà valori negativi di ε quando $|d|<90°$, cioè quando il quadro declina a sud, e valori positivi quando $|d|>90°$, cioè se il quadro declina a nord[35].

Si conferma inoltre la condizione generale secondo cui quando ε è positivo lo stilo punta al polo nord celeste, e viceversa.

In conclusione possiamo aggiungere che in un orologio verticale diretto a sud ($d=0°$) è sempre $\boxed{\varepsilon=\pm\varphi-90°}$ (nell'emisfero boreale ed in quello australe, rispettivamente), mentre in uno diretto a nord ($d=180°$) è sempre $\boxed{\varepsilon=\pm\varphi+90°}$ (nell'emisfero australe ed in quello boreale, rispettivamente)[36].

Orologio polare

Sia che si ottenga casualmente, sia che si imponga, la polarità si manifesta con $\varepsilon=0°$, che dichiara il parallelismo tra lo stilo ed il quadro: ciò si verifica

[34] Rispettivamente, come in un quadro meridiano (declinante ad est o ad ovest) o in un quadro al polo, o come in un equatoriale all'equatore diretto a nord o a sud.

[35] Naturalmente quando qui si dice sud non si intende solo il sud diretto, ma anche sud-est o sud-ovest; così per nord si intende dire anche nord-est o nord-ovest.

[36] O si può considerare, cambiando il criterio, che è $\varepsilon=\pm(\varphi-90°)$ nell'emisfero nord e $\varepsilon=\mp(\varphi+90°)$ in quello sud, coi segni corrispondenti, rispettivamente, ai casi $d=0°|180°$.

quando $\cos d - \tan\varphi \cdot \tan i = 0$, o quando $(i = 0°,\ \varphi = \pm 90°)$, o quando $(i = +90°,\ \varphi = 0°)$[37].

In questa circostanza è interessante constatare che la proprietà generale del segno di ε di indicare il polo celeste puntato dallo stilo e visto dal quadro, indicata dalla [1.2], è mantenuta ed allo stesso tempo scomparsa.
Infatti il parallelismo tra stilo e quadro rende libere ambedue le estremità del primo, e "puntabili" così entrambi i poli celesti, visti perciò tutti e due anche dal quadro: e questo cessato "privilegio" di un polo sull'altro è evidenziato proprio dalla scomparsa del segno, + o −, da ε.

Orologio equatoriale

Intuitivamente è immediato il "calcolo" di ε in questo caso: se il quadro è parallelo al piano equatoriale lo stilo gli dev'essere perpendicolare, ed ε valere $\pm 90°$.
Questa condizione è ovviamente confermata da un esame più analitico, più rigoroso, che considera la [1.1] alle prese con tre casi particolari.
Infatti l'equatorialità si manifesta con una delle tre coppie di valori di *inclinazione* e *latitudine*, o di *inclinazione* e *declinazione*, che danno origine a corrispondenti semplificazioni della formula generale, pur sempre valida:

$\begin{cases} i = +90° \\ \varphi = \pm 90° \end{cases}$	$\varepsilon = \arcsin(\pm 1 - 0)$
$\begin{cases} i = \varphi \\ d = 180° \end{cases}$	$\varepsilon = \arcsin(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$
$\begin{cases} i = -\varphi \\ d = 0° \end{cases}$	$\varepsilon = \arcsin(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = -\arcsin(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$

[38];

il risultato nel primo caso è subito evidente: $\varepsilon = \pm 90°$, con lo stesso segno della latitudine, cioè $\boxed{\varepsilon = \varphi}$; negli altri due, per la *prima relazione fondamentale del-*

[37] Vedi nota 24.
[38] Naturalmente nei due casi in cui $i = \pm\varphi$ si potrebbe considerare anche $\varepsilon = \pm\arcsin(\sin^2 i + \cos^2 i)$, ma si giungerebbe alle stesse conclusioni, e cioè $\varepsilon = \pm\arcsin 1$.

la goniometria ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$), esso è simile (rispettivamente, $\varepsilon = +90°$ e $\varepsilon = -90°$), cioè, sintetizzando:

$$\boxed{\varepsilon = -90° \cdot \operatorname{sgn}(\cos d)}$$ [39].

Perciò, in definitiva, in ogni caso $\varepsilon = \pm 90°$: ciò conferma, com'è ovvio, la perpendicolarità dello stilo al quadro, con la sempre valida proprietà del segno di ε, indicata dalla [1.2].

Esempi

Due esempi di o. generico, in cui i segni di ε indicano chiaramente che il primo "punta" lo stilo a nord ed il secondo a sud:

Es.G.1 $\boxed{\varphi = -34.2365°,\ i = +1.3°,\ d = +117.2°}$ $\Rightarrow \varepsilon = +21.4°$

Es.G.2 $\boxed{\varphi = +42.8503°,\ i = +2.4°,\ d = -5.7°}$ $\Rightarrow \varepsilon = -44.5°$

Un o. generico un po' particolare:

Es.G.3 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = +32.9°}$ $\Rightarrow \varepsilon = -32.9°$

In un o. orizzontale è evidente l'identità tra φ ed ε:

Es.O.1 $\boxed{\varphi = +38.7855°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \varepsilon = +38.8°$

In questi due oo. verticali (speculari rispetto al piano verticale est-ovest) si vede come il segno di ε dipenda dal valore di d (rispetto ai $\pm 90°$):

Es.V.1 $\boxed{\varphi = -38.7855°,\ i = 0°,\ d = +22.1°}$ $\Rightarrow \varepsilon = -46.2°$

Es.V.2 $\boxed{\varphi = -38.7855°,\ i = 0°,\ d = +157.9°}$ $\Rightarrow \varepsilon = +46.2°$

---

[39] La funzione segno, spesso usata in questo trattato, com'è noto fornisce i risultati ± 1, rispettivamente, quando il suo argomento è positivo o negativo; ma non si dimentichi che presenta valore indeterminato (talvolta considerato 0) quando l'argomento è 0. Non è quest'ultimo, comunque, il caso in questione, essendo sempre qui $|d| \neq 90°$.

In qualsiasi condizione di polarità (dovunque, come al polo o all'equatore), ovviamente ε vale sempre 0°:

Es.P.1 $\boxed{\varphi = +56.0604°,\ i = -6.6°,\ d = +99.9°}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0°$

Es.P.2 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = 0°}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0°$

Es.P.3 $\boxed{\varphi = 0°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \varepsilon = 0°$

In caso di equatorialità lo stilo, naturalmente, è sempre perpendicolare al quadro, col segno di ε ad indicare il polo celeste "puntato":

Es.E.1 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \varepsilon = -90°$

Es.E.2 $\boxed{\varphi = 0°,\ i = 0°,\ d = 180°}$ $\Rightarrow \varepsilon = +90°$

Es.E.3 $\boxed{\varphi = +58.0832°,\ i = -58.0832°,\ d = 0°}$ $\Rightarrow \varepsilon = -90°$

Cap. II – L'angolo sustilare σ

Formule

L'angolo sustilare σ indica la direzione della semiretta sustilare rispetto all'asse[40].
Considerando il triangolo sferico in cui sia

$$\boxed{\begin{array}{l}\beta = \sigma \\ \gamma = 180^\circ - d \\ a = 90^\circ - i \\ b = 90^\circ - \varphi \\ c = 90^\circ - \varepsilon\end{array}},$$

si ha (dalle [0.2])

$$\boxed{\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{\sin c}\cdot\sin b},$$

cioè (dalle [0.5])

$$\boxed{\sin\sigma = \frac{\sin d}{\cos\varepsilon}\cdot\cos\varphi}. \qquad [2.1]$$

Dalle [0.3], comunque, si può anche avere

$$\boxed{\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a\cdot\cos c}{\sin a\cdot\sin c}},$$

cioè (dalle [0.5])

$$\boxed{\cos\sigma = \frac{\sin\varphi - \sin i\cdot\sin\varepsilon}{\cos i\cdot\cos\varepsilon}}. \qquad [2.2]$$

[40] Vedi nota 15.

Esiste anche un terzo metodo (derivato dai precedenti) per calcolare l'angolo sustilare: quello per *tangente*. Esso, però, non offre vantaggi concreti rispetto agli altri due[41], anzi presenta qualche difficoltà in più, rendendone poco pratico l'utilizzo e non incoraggiandoci ad approfondirne gli sviluppi.

Dunque calcolare σ per seno, con la [2.1], darebbe sempre e solo $-90° \leqslant \sigma \leqslant +90°$, con gli $0°$ ottenibili quando $d = 0° | \pm 180°$ e/o quando $\varphi = \pm 90°$ (con un quadro diretto e/o al polo), ed i $\pm 90°$ ottenibili, rispettivamente, quando $\sin d \cdot \cos\varphi = \pm\cos\varepsilon$.
Calcolarlo per coseno, poi, con la [2.2], darebbe sempre e solo $0° \leqslant \sigma \leqslant +180°$, con gli $0° | +180°$ ottenibili, rispettivamente, quando $\varphi \pm (i - \varepsilon) = 90° | \varphi \pm (i + \varepsilon) = -90°$[42], ed i $+90°$ ottenibili (dalla [2.2] e tramite la [1.1]) quando $\tan\varphi + \tan i \cdot \cos d = 0$[43].

Considerazioni

Sebbene concettualmente l'angolo sustilare possa indicare qualsiasi *direzione* e *verso*, cioè assumere qualsiasi valore tra 0° e 360°, sia l'*arcoseno* sia l'*arcocoseno* forniscono valori solo in due quadranti anziché in tutt'e quattro (rispettivamente nel IV e nel I, e nel I e nel II), considerando quindi solo una metà degli angoli possibili per σ e trascurando l'altra metà. Per ottenere quindi la *direzione*

41 Tranne quello di utilizzare solo i dati fondamentali, d, i, φ, senza dover preventivamente calcolare l'elevazione dello stilo, ε, come invece richiesto dalla [2.1] o dalla [2.2]. Ma si tratta di un vantaggio illusorio, dovendo comunque calcolare fino in fondo un orologio, a partire da ε…

42 Considerando, dalla [2.2] e tramite le [0.6], il verificarsi delle rispettive condizioni $\sin\varphi = \cos(i - \varepsilon) | -\cos(i + \varepsilon)$.

43 In realtà sarebbe quando $\sin\varphi \cdot \cos^2 i + \cos\varphi \cdot \sin i \cdot \cos i \cdot \cos d = 0$, ma è consentito dividere per $\cos^2 i$ (essendo sempre $\cos i \neq 0$, cioè non essendo mai, in un orologio generico, $i = +90°$, caso dell'orologio orizzontale, trattato a pag. 27) e per $\cos\varphi$ (essendo sempre $\cos\varphi \neq 0$, cioè non essendo mai l'orologio ai poli, dove è evidente che non potrebbe mai venire $\sigma = +90°$, bensì sempre $\sigma = 0° | \pm 180°$).

giusta della sustilare può essere necessaria una correzione, che eventualmente scaturirà da un primo controllo che dovremo effettuare, e che chiameremo, appunto, *controllo della giusta direzione*.
Inoltre l'angolo ricavabile con le due funzioni, anche dopo l'eventuale correzione, è quello dell'estremità *nord* dello stilo[44], o, se si preferisce considerarlo così, uno dei due che indicano sì la *direzione* della sustilare, rimanendo però ambiguo il *verso*. Per calcolare perciò definitivamente ed univocamente σ, è necessaria un'ulteriore verifica, che chiameremo *controllo del giusto verso*.
Ciò premesso, affrontiamo l'uso delle due funzioni, cercando intanto un metodo per superare la prima, comune, limitazione che esse presentano.

> Il sistema per superare il limite intrinseco di ciascuna funzione è semplicemente quello di usarle *insieme*, in una sorta di controllo incrociato.

Ad esempio, l'arcoseno (dalla [2.1]) di un valore positivo porrebbe σ nel I quadrante, ignorando il II, altrettanto legittimo: qual è allora quello giusto? Simmetricamente l'arcoseno di un valore negativo (spostando l'analisi sul semicerchio goniometrico inferiore) indicherebbe il IV quadrante: ma se fosse il III quello giusto?
Lo stesso per il valore nullo: se il seno valesse 0, chi ci dice che σ sarebbe 0° anziché ±180°?
Ecco allora che per superare l'imbarazzo basta in ogni caso calcolare *anche* il coseno di σ (con la [2.2], senza che ci sia bisogno di ricavarne l'angolo con la funzione inversa): se il segno di $\cos\sigma$ è positivo, allora vuol dire che è "buono" il semicerchio goniometrico destro, cioè che l'angolo σ calcolato con l'arcoseno (I, IV quadrante, o 0° che sia) è quello giusto; ma se il segno di $\cos\sigma$ è negativo, allora il σ calcolato con l'arcoseno è nel semicerchio goniometrico sinistro (quindi nel II o III quadrante, o ±180°, rispettivamente), andando perciò corretto nel modo che stiamo per vedere.
Questa verifica costituisce il *controllo della giusta direzione*.

[44] Possiamo a tutti gli effetti considerare lo stilo una retta, orientata nello spazio e passante per il centro dell'orologio, che perciò la divide in due semirette: una rivolta verso il polo nord celeste ed una verso il polo sud.

Come detto, il controllo si può fare indifferentemente in entrambi i modi: sia calcolando σ per seno e controllandolo per coseno, sia calcolandolo per coseno e controllandolo per seno.

Le seguenti tabelle riassumono le combinazioni possibili e chiariscono il meccanismo:

sin \ cos	–	0	+
+	II	+90°	I
0	±180°		0°
–	III	–90°	IV

, [2.3]

cioè[45]

calc. sin + contr. cos

sin \ cos	–	+
+	$\sigma' = 180° - \sigma$	$\sigma' = \sigma$
0	$\sigma = \pm 180°$	$\sigma = 0°$
–	$\sigma' = 180° - \sigma$	$\sigma' = \sigma$

,

calc. cos + contr. sin

sin \ cos	–	0	+
+	$\sigma' = \sigma$	$\sigma = +90°$	$\sigma' = \sigma$
–	$\sigma' = -\sigma$	$\sigma = -90°$	$\sigma' = -\sigma$

.

Quindi, in definitiva, avendo calcolato σ per seno,

$$\boxed{\cos\sigma < 0 \quad \sigma' = 180° - \sigma}, \qquad [2.4]$$

mentre avendolo calcolato per coseno,

$$\boxed{\sin\sigma < 0 \quad \sigma' = -\sigma}. \qquad [2.5]$$

Relativamente a questa seconda verifica, si può aggiungere che $\sin\sigma < 0$ quando è $\sin d \cdot \cos\varphi < 0$ (non essendo mai $\cos\varepsilon < 0$[46]), cioè, in sostanza, quando è negativa la declinazione[47] (non essendo mai $\cos\varphi < 0$[48]), perciò, in definitiva, con quadri *orientali*.

---

[45] Si notino anche le eventuali correzioni da apportare.

[46] Nel caso generale; può essere tutt'al più nullo, però solo nell'orologio polare, trattato a parte, a pag. 29.

[47] Purché la si esprima comprendendola sempre tra $-180°$ e $+180°$: infatti una declinazione di $+200°$, ad esempio, verificherebbe la condizione pur essendo espressa come positiva (nell'ambito cioè di valori da 0° a +360°), essendone negativo il seno; viceversa una declina-

Il controllo [2.5], quindi, si può ridurre a

$$\boxed{d < 0^\circ} \boxed{\sigma' = -\sigma}, \qquad [2.6]$$

facendo probabilmente preferire, perciò, proprio l'uso del calcolo di σ per coseno, visto che per la verifica non è necessario calcolare un'altra funzione, essendo sufficiente controllare la sola declinazione.

> Da qui in poi, perciò, utilizzeremo la funzione coseno per impostare il calcolo dell'angolo sustilare.

Dunque con questo sistema, cioè con la [2.2][49] e la [2.6], riusciamo ad ottenere definitivamente l'angolo della semiretta sustilare *nord*, cioè della proiezione sul quadro della parte di stilo che dal centro dell'orologio punta verso il polo nord celeste[50].
Ora però è evidente che se quella parte di stilo è "murata", cioè è quella nascosta dietro al quadro, *non* è quella che interessa noi, così come non ci interessa *quel* valore di σ: a noi interessa ovviamente la parte di stilo con l'estremità libera, perciò se questa è quella sud (indicata dal segno negativo di ε – vedi la definizione [1.2], a pag. 14), allora vuol dire che il valore di σ fin qui calcolato (che si riferisce al nord) va cambiato col suo opposto, perciò aumentato (o diminuito) di 180°.
La regola per sciogliere il dubbio è quindi semplicemente questa:

> se ε è negativo, l'angolo effettivo del verso di σ è l'opposto di quello della direzione,

cioè

$$\boxed{\varepsilon < 0^\circ} \boxed{\sigma' = \sigma + 180^\circ}. \qquad [2.7]$$

Abbiamo così appena descritto il *controllo del giusto verso*.
Finalmente a questo punto, cioè dopo aver sottoposto il valore di σ calcolato con la [2.2] a due controlli ed alle relative *eventuali* modifiche, cioè alla [2.6] ed

---

zione espressa come -190°, quindi negativa, sembrerebbe verificare la condizione, erroneamente però, essendo il suo seno tutt'altro che negativo.

[48] Tutt'al più nullo, al polo, condizione che, oltretutto, azzererebbe anche il $\sin d$.

[49] O meglio, con la funzione inversa, cioè con l'arcocoseno, ovviamente.

[50] Oppure, come s'è detto in precedenza, si può considerare che si è trovata la direzione della sustilare, attraverso uno dei due angoli opposti che la definiscono.

alla [2.7], siamo sicuri di aver trovato l'univoco e definitivo valore dell'angolo sustilare, che viene naturalmente sempre $-180° \leqslant \sigma \leqslant +180°$.
Per concludere, una puntualizzazione di carattere grafico-notazionale: definiamo *eventuali* le modifiche poiché applicabili *solo se* si verificano le relative condizioni, ovviamente, e che perciò a rigore non sarebbe corretto scrivere $\sigma' = \sigma + 180°$ dopo che già si era applicata la correzione $\sigma' = -\sigma$, dovendosi scrivere invece $\sigma'' = \sigma' + 180°$; ma se così si scrivesse, e però la correzione $\sigma' = -\sigma$ *non* fosse stata necessaria, scrivere $\sigma'' = \sigma' + 180°$ sarebbe inesatto a sua volta, e rischierebbe l'ambiguità, facendo pensare che un σ' debba essere stato comunque generato da una precedente correzione, invece inutile…

> La simbologia degli apici, perciò, è da considerarsi solo indicativa, e va considerata col buon senso: scrivere $\sigma' = \ldots$, infatti, serve solo a sottolineare che in *quel* passaggio si sta modificando un valore, *indipendentemente* da ciò che si può esser fatto in precedenza.

Del resto potremmo evitare tutte queste considerazioni e non usare affatto gli apici, scrivendo $\sigma = -\sigma$ e $\sigma = \sigma + 180°$, ma scegliamo invece la prima soluzione che tutto sommato ci sembra la più coerente ed elegante.
Concludiamo con una considerazione per "semplificare" i calcoli, se si preferisce.
In alternativa all'uso separato ed in sequenza dei controlli [2.6] e [2.7] si potrebbe trovare più comodo l'uso di un'unica formula per effettuare le stesse operazioni, e naturalmente raggiungere gli stessi risultati.
Ad esempio si può creare ed usare la seguente formula per controllare e correggere in un colpo solo il valore di σ che scaturisce dalla funzione [2.2]:

$$\sigma' = \sigma \cdot \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}\left(d - |d|\right) + 0.5\right) + 180° \cdot \operatorname{sgn}\left(|\varepsilon| - \varepsilon\right).$$

E naturalmente, esasperando la cosa, si può scrivere direttamente

$$\sigma = \arccos\left(\frac{\sin\varphi - \sin i \cdot \sin\varepsilon}{\cos i \cdot \cos\varepsilon}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}\left(d - |d|\right) + 0.5\right) + 180° \cdot \operatorname{sgn}\left(|\varepsilon| - \varepsilon\right),$$

per calcolare subito il valore vero e definitivo di σ, in funzione di φ, i, d ed ε.

Casi particolari

Orologio orizzontale

Proviamo a vedere cosa succede alla [2.2] quando $i=+90°$: la formula diventerebbe $\boxed{\cos\sigma=\frac{\sin\varphi-\sin\varepsilon}{0}}$, cioè (essendo in un orologio orizzontale $\varepsilon=\varphi$) $\boxed{\cos\sigma=\frac{\sin\varphi-\sin\varphi}{0}=\frac{0}{0}}$, quindi dando luogo ad una situazione di indeterminatezza.
In realtà si comprende facilmente che cosa accade a σ al *tendere* di i a +90°.
Immaginiamo infatti che il quadro (a qualunque latitudine, purché nord) sia *quasi* orizzontale, che l'inclinazione cioè sia molto prossima a +90°, diciamo +89.9°, e che la declinazione sia +20°: be', in questo caso le formule generali fornirebbero un valore di σ *molto vicino* a +20°, cioè come la declinazione; se d invece valesse, ad esempio, −105° σ varrebbe praticamente altrettanto, cioè −105°; e così via. Sembrerebbe allora che l'angolo sustilare σ, in quadri molto prossimi all'orizzontalità, valesse in ogni caso come la declinazione.
Ma a guardare il quadro in quella posizione, cioè praticamente orizzontale, un angolo (misurato dall'asse) che valesse come la declinazione indicherebbe senza dubbio il *nord* (naturalmente lo indicherebbe *davvero* se il quadro diventasse *esattamente* orizzontale). E questo con qualunque latitudine o declinazione.
Nell'emisfero australe il discorso cambierebbe un po': un quadro praticamente orizzontale darebbe valori di σ pari a $d-180°$ con declinazioni positive, e pari a $d+180°$ con declinazioni negative, che però significherebbe in ogni caso indicare chiaramente il *sud*, se il quadro fosse perfettamente orizzontale (con qualsiasi latitudine o declinazione).
Del resto è evidente che su un quadro orizzontale la sustilare è, in generale, allineata col meridiano[51], e la realtà dei fatti conferma le tendenze appena descritte "analiticamente": in particolare nell'emisfero boreale il polo celeste visibile, e quindi la sustilare, è chiaramente a nord, mentre nell'emisfero australe è a sud.

[51] E con la *meridiana*.

Perciò, scelto convenzionalmente come asse di riferimento il punto cardinale *nord* (mancando la retta di massima pendenza), si misura l'angolo sustilare σ semplicemente individuandolo a $0°$ per le latitudini nord (quindi da nord rimane nord), ed a $180°$ per le latitudini sud (quindi da nord diventa sud)[52]: questo risultato si può ottenere costruendo la semplice funzione di φ $\boxed{\sigma = \arccos(\operatorname{sgn}\varphi)}$.

Orologio verticale

Quando $i = 0°$ la [2.2] (pur sempre valida) si può semplificare in

$$\boxed{\sigma = \arccos\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon}\right)}, \tag{2.8}$$

ottenendo sempre $0° \leqslant \sigma \leqslant +180°$. In particolare si osserva facilmente che σ viene $0° | +180°$ quando l'orologio è diretto ed è, rispettivamente, nell'emisfero boreale o in quello australe[53], e viene $+90°$ all'equatore (vedi anche le conclusioni a pag. 22).

Come sappiamo, però, i valori che si ottengono dalla funzione primaria possono essere tutt'altro che giusti, pertanto l'utilizzo della [2.8] rimane lo stesso già discusso nel caso generale, cioè in abbinamento alla relativa verifica (che è sempre con la [2.6], non subendo la [2.1] modifiche). Perciò

$$\boxed{d < 0°}\boxed{\sigma' = -\sigma},$$

che porta i valori possibili per l'angolo sustilare al completo cerchio goniometrico, $-180° \leqslant \sigma \leqslant +180°$.

Avendo così, come nel caso generale, effettuato il *controllo della giusta direzione* (o, se si vuole, calcolato il verso dell'estremità nord della sustilare), non ci re-

---

[52] Ovviamente non si considera qui la possibilità dell'orologio orizzontale all'equatore, in quanto quella è la condizione dell'orologio polare (vedi pag. 29).

[53] Infatti $\sigma = 0°$ quando $\varepsilon = \pm(90° - \varphi)$, che si verifica solo nell'emisfero boreale (dovendosi mantenere ε entro i 90°), e $\sigma = +180°$ quando $\varepsilon = \pm(90° + \varphi)$, che si verifica solo nell'emisfero australe (per lo stesso motivo); in entrambi i casi, comunque, si tratta di orologi diretti, indifferentemente a nord o a sud, cioè col segno di ε indifferentemente positivo o negativo ("guardando" sempre il polo nord celeste un o. verticale diretto a nord, e il polo sud uno diretto a sud). Vedi anche le conclusioni su ε nell'o. verticale a pag. 17.

sta che effettuare il *controllo del giusto verso*, verificando cioè se il valore di σ ottenuto fino a questo punto è quello buono tramite la [2.7], che però nel caso di orologio verticale si può semplificare, riducendosi a

$$\boxed{|\mathrm{d}| < 90^\circ} \boxed{\sigma' = \sigma + 180^\circ}. \qquad [2.9]$$

Perciò, ricapitolando, si può calcolare l'angolo sustilare in un orologio verticale usando la [2.8] con la [2.6] e con la [2.9], ed ottenendo ovviamente e definitivamente, come nel caso generale, $-180^\circ \leqslant \sigma \leqslant +180^\circ$.

Orologio polare

Vale la pena di ricordare che nell'orologio polare, visto il parallelismo dello stilo al quadro ($\varepsilon = 0^\circ$), non ci sono poli privilegiati, lo stilo ha entrambe le estremità libere, punta cioè ad entrambi i poli celesti: perciò il *controllo del giusto verso*, che abbiamo già incontrato in precedenza e che si basa sul segno negativo dell'elevazione dello stilo, qui non ha senso, non è necessario.
Questo vuol dire, in sostanza, che il valore dell'angolo σ che calcoleremo con la funzione arcocoseno andrà sottoposto solo al *controllo della giusta direzione* (rimanendo infatti poi immutato anche se sottoposto all'inutile successivo controllo).
Ciò premesso, la polarità dell'orologio si manifesta, com'è noto, quando si verifica una delle tre condizioni di polarità: o quando $\cos \mathrm{d} - \tan \varphi \cdot \tan \mathrm{i} = 0$, oppure quando $\left(\mathrm{i} = 0^\circ,\ \varphi = \pm 90^\circ\right)$, o quando $\left(\mathrm{i} = +90^\circ,\ \varphi = 0^\circ\right)$.
In ogni caso la [2.2] si semplifica in

$$\boxed{\sigma = \arccos\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \mathrm{i}}\right)}, \qquad [2.10]$$

ottenendo sempre $0^\circ \leqslant \sigma \leqslant +180^\circ$. Si nota che i valori $0^\circ \middle| +180^\circ$ sono raggiunti da σ quando il quadro, rispettivamente nell'emisfero boreale o in quello australe, è inclinato di un angolo pari alla colatitudine, indifferentemente verso

l'alto o verso il basso[54], ed i $+90°$ si ottengono quando l'orologio è all'equatore (non orizzontale e declinante ad est o ad ovest).
Il segno del seno, semplificandosi la [2.1] in $\sin\sigma = \sin d \cdot \cos\varphi$, è, come nel caso generale, negativo quando è negativa la declinazione, rimanendo perciò valida per il *controllo della giusta direzione* la [2.6]:

$$d < 0° \quad \sigma' = -\sigma.$$

Dunque in generale (cioè nella I e nella II condizione di polarità) il calcolo dell'angolo sustilare in un orologio polare si può effettuare usando la [2.10] e la [2.6] (ottenendo a questo punto valori possibili per l'angolo sustilare compresi nel completo cerchio goniometrico, $-180° \leqslant \sigma \leqslant +180°$), tranne che in un caso, però.
Nella III condizione di polarità, infatti, cioè in un orologio orizzontale-polare all'equatore $\left(i = +90°,\ \varphi = 0°\right)$ il rapporto al secondo membro della [2.10] assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, rendendo impossibile l'applicazione della formula.
Apparentemente non sembrerebbe esserci il sistema per calcolare l'angolo sustilare…
In realtà basta un po' di buon senso ed una considerazione: negli orologi orizzontali, mancando la linea di massima pendenza, la sustilare si misura sul meridiano, da nord (vedi la nota 15), in più nei polari, essendo lo stilo parallelo al quadro, e quindi con tutt'e due le estremità libere, esso punta ad entrambi i poli celesti, quindi anche a nord. Ecco quindi senz'altro che $\sigma = 0°$.
Perciò, in definitiva, l'angolo sustilare nell'orologio polare risulta sempre, come nel caso generale, $-180° \leqslant \sigma \leqslant +180°$.

[54] σ infatti esce $0°$ quando $i = \pm\left(90° - \varphi\right)$, che può verificarsi solo a nord dell'equatore (non potendo l'inclinazione raggiungere, né tantomeno superare, i 90° assoluti), ed esce $180°$ quando $i = \pm\left(90° + \varphi\right)$, cioè solo a sud dell'equatore (per lo stesso motivo).

Orologio equatoriale

Quando $\varepsilon = \pm 90°$, cioè quando $(i = +90°,\ \varphi = \pm 90°)$, o quando $(i = \varphi,\ d = 180°)$, o quando $(i = -\varphi,\ d = 0°)$, lo stilo è perpendicolare al quadro, perciò la sustilare non esiste, degenera in un punto, quindi σ risulta indeterminato, né del resto le formule sarebbero utilizzabili.
Allora, poiché per motivi pratici di costruzione dell'orologio una linea da considerare "sustilare" occorre, stabiliamo di adottare come linea sustilare la semiretta di massima pendenza *inferiore*, assumendo perciò convenzionalmente come angolo sustilare il valore $\sigma = 180°$.
Questo è possibile, naturalmente, quando il quadro manifesta appunto una pendenza, cioè un'inclinazione diversa da 90°, come nella II $(i = \varphi,\ d = 180°)$ o III $(i = -\varphi,\ d = 0°)$ condizione di equatorialità.
Ma quando il caso è ancora più particolare, come nella I condizione di equatorialità, quella dell'orologio equatoriale-orizzontale al polo $(i = +90°,\ \varphi = \pm 90°)$, mancando la pendenza del quadro, la sustilare si presume allineata sull'antimeridiano *locale*[55], vale a dire $\sigma = 0°$ al polo nord e $\sigma = 180°$ al polo sud.
In definitiva, perciò, dato che in un orologio equatoriale l'angolo sustilare vale 0° solo al polo nord e 180° in tutto il resto del pianeta, è possibile (e pratico) costruire una funzione di φ che fornisca immediatamente σ, come $\boxed{\sigma = 2 \cdot \arcsin\left(\operatorname{sgn}(90° - \varphi)\right)}$.
Infine aggiungiamo che in un orologio equatoriale la sustilare si considera coincidente con la *meridiana*.

Esempi

Quest'o. generico richiede solo la correzione per la direzione:

Es.G.4 $\boxed{\varphi = +43.0182°,\ i = -1.0°,\ d = -95.4°}$

$$\Rightarrow \sigma = +46.8° \quad \times(-1) \quad = -46.8°$$

[55] Vedi anche la nota 15.

In quest'o. generico il calcolo dà un valore di σ che richiede entrambe le correzioni:

Es.G.2 $\boxed{\varphi = +42.8503°,\ i = +2.4°,\ d = -5.7°}$

$$\Rightarrow \sigma = +5.9° \quad \times(-1) \quad = -5.9° \quad +180° \quad = +174.1°$$

In quest'o. generico la sustilare, orizzontale, richiede solo la correzione per la direzione:

Es.G.5 $\boxed{\varphi = +10.0409°,\ i = +12.3°,\ d = -144.3°}$

$$\Rightarrow \sigma = +90.0° \quad \times(-1) \quad = -90.0°$$

Caso di o. generico, al polo sud, in cui la sustilare si ottiene dopo il controllo per il giusto verso:

Es.G.3 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = +32.9°}$

$$\Rightarrow \sigma = +180.0° \quad +180° \quad = +360.0°$$

In un o. orizzontale la sustilare è allineata col meridiano, perciò σ vale 0° o 180°, secondo la latitudine:

Es.O.1 $\boxed{\varphi = +38.7855°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \sigma = 0°$

Es.O.2 $\boxed{\varphi = -52.6997°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \sigma = 180°$

In quest'o. verticale σ raggiunge il valore definitivo solo dopo la correzione per il giusto verso:

Es.V.1 $\boxed{\varphi = -38.7855°,\ i = 0°,\ d = +22.1°}$

$$\Rightarrow \sigma = +154.9° \quad +180° \quad = +334.9°$$

In quest'o. verticale (opposto del precedente) σ raggiunge il valore definitivo già dopo la correzione per la giusta direzione:

Es.V.3 $\boxed{\varphi = -38.7855°,\ i = 0°,\ d = -157.9°}$

$$\Rightarrow \sigma = +154.9° \quad \times(-1) \quad = -154.9°$$

In quest'o. verticale all'equatore la sustilare corretta si ottiene dopo il controllo del giusto verso:

Es.V.4 $\boxed{\varphi = 0°,\ i = 0°,\ d = +70.9°}$ $\Rightarrow \sigma = +90.0°$ $+180°$ $= +270°$

Un o. polare "qualsiasi" (non orizzontale, nella I condizione), che esce già buono dalla funzione arcocoseno:

Es.P.1 $\boxed{\varphi = +56.0604°,\ i = -6.6°,\ d = +99.9°}$ $\Rightarrow \sigma = +33.4°$

Un o. polare verticale (quadro meridiano, nella I condizione), con σ ottenuto dopo la correzione, poiché declinante ad est:

Es.P.4 $\boxed{\varphi = -11.0985°,\ i = 0°,\ d = -90°}$ $\Rightarrow \sigma = +101.1°$ $\times(-1)$ $= -101.1°$

In un o. polare orizzontale (cioè all'equatore, III condizione) σ vale sempre 0°:

Es.P.3 $\boxed{\varphi = 0°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \sigma = 0°$

In un o. polare al polo, quindi verticale, la sustilare esce già buona dalla funzione arcocoseno:

Es.P.2 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = 0°}$ $\Rightarrow \sigma = +180.0°$

In quest'o. polare all'equatore la sustilare va corretta per la giusta direzione, poiché il quadro declina ad est:

Es.P.5 $\boxed{\varphi = 0°,\ i = +28.3°,\ d = -90°}$ $\Rightarrow \sigma = +90.0°$ $\times(-1)$ $= -90.0°$

In un o. equatoriale σ può valere solo 0° (al polo nord) o 180° (in tutto il resto del pianeta):

Es.E.4 $\boxed{\varphi = +90°,\ i = +90°}$ $\Rightarrow \sigma = 0°$

Es.E.3 $\boxed{\varphi = +58.0832°,\ i = -58.0832°,\ d = 0°}$ $\Rightarrow \sigma = 180°$

Cap. III – L'ora sustilare t_σ

Formule

L'angolo t_σ indica l'ora segnata dalla sustilare: è quel valore, cioè, che fissa sul quadrante il riferimento orario di base per l'orologio che si sta calcolando[56].
Per calcolare l'angolo t_σ, bisogna però calcolare preliminarmente un altro angolo: l'angolo P_σ al polo.

> Il valore angolare (ed *orario*) P_σ rappresenta in sostanza lo scarto, l'*anticipo* o il *ritardo*, rispetto al mezzogiorno locale, del Sole quando, per così dire, "transita" sul quadro. Dà, cioè, un'indicazione precisa su come il quadro sia collocato rispetto alla posizione ed all'istante del transito del Sole a mezzogiorno.

Più rigorosamente, P_σ è l'angolo al polo del Sole[57] quando esso proietta l'ombra dello stilo sulla sustilare; potremmo dire anche che P_σ è l'angolo tra il piano meridiano locale ed il "piano meridiano" del quadro, il piano "polare-sustilare", cioè il piano che ruotando sull'asse polare terrestre (o sullo stilo) interseca il quadro perpendicolarmente.
La sua genesi è del tutto simile a quella già vista per l'angolo sustilare σ (vedi Cap. II – L'angolo sustilare σ): considerando cioè il triangolo sferico in cui

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = P_\sigma \\ \beta = \sigma \\ \gamma = 180° - d \\ a = 90° - i \\ b = 90° - \varphi \\ c = 90° - \varepsilon \end{array}},$$

[56] Le linee orarie, naturalmente, completeranno il lavoro (vedi Cap. IV – Gli angoli ω delle linee orarie).
[57] L'angolo orario, misurato al polo nord celeste, tra il meridiano superiore (quello che contiene lo zenit) ed il meridiano dell'astro.

è facilmente riscontrabile che α (P_σ) svolge un ruolo del tutto analogo a quello svolto da β (σ), e che perciò si può arrivare a calcolare P_σ nello stesso modo usato per σ, e cioè o per seno,

$$\boxed{\sin P_\sigma = \frac{\sin d}{\cos \varepsilon}\cdot \cos i}, \qquad [3.1]$$

o per coseno,

$$\boxed{\cos P_\sigma = \frac{\sin i - \sin\varphi \cdot \sin\varepsilon}{\cos\varphi\cdot\cos\varepsilon}} \qquad [3.2]$$

(come nel caso dell'angolo sustilare, esiste anche una terza possibilità per calcolare P_σ, per *tangente*, che però ignoriamo, poiché meno pratica).
Uscendo dalla funzione arcoseno, l'angolo P_σ al polo viene sempre $-90° \leqslant P_\sigma \leqslant +90°$, con gli $0°$ ottenibili quando $d = 0° | \pm 180°$ o quando $i = +90°$ (cioè con un quadro diretto o orizzontale), ed i $\pm 90°$ ottenibili, rispettivamente, quando $\sin d \cdot \cos i = \pm \cos\varepsilon$.
Se calcolato come arcocoseno, l'angolo P_σ al polo esce sempre $0° \leqslant P_\sigma \leqslant +180°$, con gli $0° | +180°$ ottenibili, rispettivamente, quando (tramite le [0.6]) $\sin i = \cos(\varphi - \varepsilon) | -\cos(\varphi+\varepsilon)$, cioè quando $\pm(\varphi-\varepsilon) + i = 90° | \pm(\varphi+\varepsilon) - i = 90°$ [58], ed i $+90°$ ottenibili (dalla [3.2] e tramite la [1.1]) quando $\tan i + \tan\varphi \cdot \cos d = 0$ [59].

[58] In sostanza con quadri diretti, che, rispettivamente, nell'emisfero nord guardano a sud ed in quello sud guardano a nord, o che nell'emisfero nord guardano a nord ed in quello sud guardano a sud, indipendentemente dall'inclinazione.

[59] In realtà sarebbe quando $\sin i \cdot \cos^2\varphi + \cos i \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos d = 0$, ma è consentito dividere per $\cos^2\varphi$ (essendo sempre $\cos\varphi \neq 0$, cioè non essendo mai, come vedremo meglio più avanti, l'orologio ai poli, dove il 2° membro della [3.2] assumerebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e dove è evidente che non potrebbe mai venire $P_\sigma = +90°$, bensì sempre $P_\sigma = 0° | \pm 180°$) e per $\cos i$ (essendo sempre $\cos i \neq 0$, cioè non essendo mai, in un orologio generico, $i = +90°$, caso dell'orologio orizzontale, trattato a pag. 38).

Considerazioni

Riguardo al modo di calcolare l'angolo P_σ al polo valgono *in gran parte* le stesse considerazioni già fatte per l'angolo sustilare σ, e a quelle rimandiamo (vedi a pag. 22), per non ripetere concetti sostanzialmente identici.
L'unica differenza significativa sta invece nel fatto che l'angolo calcolato con la funzione richiede solo il controllo per la *giusta direzione*, senza necessitare di quello per il giusto verso (in un certo senso già intrinsecamente corretto): in pratica acquisendo col calcolo l'entità dello scarto della sustilare rispetto al mezzogiorno, occorre soltanto stabilire se si tratta di un anticipo o di un ritardo (serve cioè stabilire il segno).
Perciò i passaggi necessari a calcolare correttamente l'angolo P_σ al polo sono solo due:

- calcoleremo P_σ col *coseno* (con la [3.2])…
- … e controlleremo la *giusta direzione* col *seno*,

$$\boxed{d < 0°} \quad \boxed{P'_\sigma = -P_\sigma} \qquad [3.3]$$

(rimanendo la [3.3] sostanzialmente analoga alla [2.6], sebbene ottenibile per motivi diversi, per quanto analoghi[60]).

In definitiva, perciò, risulta sempre $-180° \leqslant P_\sigma \leqslant +180°$.
Ciò premesso, e prima di proseguire, occorre soffermarsi sul caso di orologio al polo, che, con $\varphi = \pm 90°$, rende indeterminato il 2° membro della [3.2] (come già accennato nella nota 59).
Non potendosi in quel caso applicare la formula [3.2], cioè calcolare l'angolo P_σ al polo… al polo! per *coseno*, si potrebbe allora calcolarlo per *seno*[61], con la [3.1], ottenendo evidentemente $P_\sigma = 0°$.
Rimarrebbe però il dubbio che potesse essere invece $P_\sigma = 180°$ (cioè $180° - 0°$, che s'otterrebbe se fosse $\cos P_\sigma < 0$), occorrendo perciò controllare la *giusta direzione* col segno del coseno di P_σ. Ma, come già s'è detto, il cose-

[60] Con la sustilare il seno è negativo quando lo è $\sin d \cdot \cos \varphi$, quindi la declinazione (non essendolo mai $\cos \varphi$); con l'angolo al polo il seno è negativo quando lo è $\sin d \cdot \cos i$, quindi ugualmente la declinazione (non essendolo mai $\cos i$).
[61] Sistema alternativo sempre lecito, ricordiamo (vedi anche le Considerazioni sul calcolo dell'angolo sustilare, a pag. 22).

no di P_σ non è calcolabile con la [3.2], perciò sembriamo finiti in un vicolo cieco…
In realtà non c'è bisogno di *calcolare* il coseno dell'angolo: per effettuare il controllo della *giusta direzione*, infatti, è sufficiente verificare se e quando il suo *segno* è negativo, cioè, nel nostro caso, verificare quando $\sin i < \sin\varphi \cdot \sin\varepsilon$ (non essendo mai negativi $\cos\varphi$ e $\cos\varepsilon$).
Si trova allora che al polo nord la condizione risulterebbe verificata qualora fosse $\sin i < \sin\varepsilon$, cioè quando $\varepsilon > i$; ma, com'è evidente, in un orologio al polo nord l'elevazione dello stilo sul quadro è sempre *uguale* all'inclinazione di questo, *mai* superiore (né inferiore), perciò la condizione *non* si verifica.
Analogamente, al polo sud la condizione risulterebbe verificata qualora fosse $\sin i < -\sin\varepsilon$, cioè quando $\varepsilon < -i$; ma, com'è evidente, in un orologio al polo sud l'elevazione dello stilo sul quadro è sempre *uguale* all'opposto dell'inclinazione di questo, *mai* inferiore (né superiore), perciò la condizione *non* si verifica.
Ecco allora che, pur senza dover/poter calcolare il coseno di P_σ, siamo in grado ugualmente di effettuare il controllo della *giusta direzione*, e stabilire, in sostanza, che l'angolo calcolato per seno, cioè $P_\sigma = 0°$, in un orologio al polo, nord o sud che sia, costituisce da subito l'angolo effettivo.
Questa conclusione, dimostrata analiticamente, conferma ovviamente ciò che può averci già suggerito il buon senso: costituendo infatti l'angolo P_σ al polo lo scarto tra il "transito" del Sole sul quadro ed il transito al meridiano, ed essendo un orologio non orizzontale al polo sempre diretto, è evidente che il "transito" sul quadro coincide con quello al meridiano, e che perciò non c'è scarto, cioè che l'angolo in questione, P_σ, non può valere che 0°.
Veniamo così a t_σ.
L'ora t_σ della sustilare si calcola molto semplicemente aggiungendo 180° (cioè 12^h) a P_σ, e convertendo ovviamente il risultato in ore:

$$\boxed{t_\sigma = \frac{180° + P_\sigma}{15}}; \qquad [3.4]$$

il meccanismo di questa procedura dovrebbe apparire chiaro: se il Sole transita sul meridiano locale a mezzogiorno, cioè all'istante 12^h, e "transita" sul quadro con un ritardo quantificabile in P_σ ore, allora quel transito, scandito dall'ora sustilare, avviene alle $12^h + P_\sigma$[62].

Visto perciò l'àmbito dei valori possibili per P_σ, si avrà per l'ora sustilare l'intervallo $0^h \leqslant t_\sigma \leqslant 24^h$.

Concludendo, facciamo notare come l'ora sustilare (come anche la *meridiana*) teoricamente sempre individuabile, nella pratica però possa non essere tracciabile, non essendo mai indicata dall'ombra dello stilo, in quanto ricadente al di fuori dell'intervallo d'illuminazione dell'orologio[63], come nell'Es.V.1 a pag. 42.

Casi particolari

Orologio orizzontale

Quando $i = +90°$ la [3.2], pur sempre valida, si può semplificare in

$$\boxed{\cos P_\sigma = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1}$$[64];

il risultato è in ogni caso $P_\sigma = 0°$, evidentemente definitivo (non avendo senso un controllo con la [3.3], visto che l'angolo non ha segno).

Del resto non può che essere così (cioè nessuno scostamento dalla sustilare), essendo P_σ per definizione l'angolo al polo tra il meridiano del luogo ed il "meridiano" del quadro, coincidenti vista l'orizzontalità di quest'ultimo.

Naturalmente $t_\sigma = 12^h$.

Orologio verticale

Quando $i = 0°$, P_σ può essere innanzitutto calcolato come

$$\boxed{P_\sigma = \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\varepsilon)}, \qquad [3.5]$$

[62] Naturalmente se P_σ è negativo si tratterà di un anticipo.

[63] Vedi G. Fantoni. *Orologi solari*, cap. X.

[64] Essendo $\varepsilon = \varphi$ (vedi l'elevazione dello stilo nell'orologio orizzontale, a pag. 16).

che dà sempre $0° \leqslant P_\sigma \leqslant +180°$ (come nel caso generale)[65], e quindi sottoposto al controllo della *giusta direzione* con l'equivalente della [3.3] in caso di verticalità, che però rimane identica a quella, nonostante la semplificazione della [3.1],

$$\boxed{d < 0°}\ \boxed{P'_\sigma = -P_\sigma},$$

che porta perciò i valori a spaziare nell'ambito $-180° \leqslant P_\sigma \leqslant +180°$ (come nel caso generale).
Da P_σ a t_σ il passo è breve: con la [3.4],

$$\boxed{t_\sigma = \frac{180° + P_\sigma}{15}},$$

risulta, come nel caso generale, $0^h \leqslant t_\sigma \leqslant 24^h$.

Orologio polare

Quando $\varepsilon = 0°$, cioè quando $\cos d - \tan\varphi \cdot \tan i = 0$, oppure quando $(i = 0°,\ \varphi = \pm 90°)$, o quando $(i = +90°,\ \varphi = 0°)$ la [3.2] si semplifica in

$$\boxed{P_\sigma = \arccos\left(\frac{\sin i}{\cos\varphi}\right)}, \tag{3.6}$$

che, in quanto arcocoseno, dà sempre $0° \leqslant P_\sigma \leqslant +180°$[66].

---

[65] Con gli $0°|180°$ raggiunti quando $\pm(\varphi - \varepsilon) = 90°|\pm(\varphi + \varepsilon) = 90°$, rispettivamente (in sostanza con quadri diretti, orientati come nel caso generale – vedi la nota 58), e i $90°$ raggiunti sull'equatore (con $\varphi = 0°$, non considerando qui il caso in cui $\varepsilon = 0°$, caso dell'orologio polare, trattato qui di seguito).

[66] Analogamente al caso generale (vedi a pag. 35), gli $0°|180°$ si ottengono quando, rispettivamente, $\pm\varphi + i = 90°|\pm\varphi - i = 90°$ (cioè con quadri diretti, che, rispettivamente, nell'emisfero nord guardano a sud ed in quello sud guardano a nord, o che nell'emisfero nord guardano a nord ed in quello sud guardano a sud), ed i $90°$ sono ottenuti all'equatore (dove l'orologio è anche orizzontale).

Si noti che, mentre nella I e nella III condizione di polarità non si manifestano problemi ad applicare la formula [3.6], nella II condizione, cioè con $\left(i=0°,\ \varphi=\pm 90°\right)$, si verifica la situazione di indeterminatezza dell'argomento della funzione, $\frac{0}{0}$ (già discussa a pag. 36, nelle Considerazioni sul caso generale), che ne rende impossibile l'utilizzo.

Naturalmente, però, essendo P_σ, come nel caso generale, calcolabile per seno, si trova che $P_\sigma = 0°$, rimanendo tale anche dopo il controllo per la *giusta direzione* col segno del coseno, non essendo mai $i<0°$ (perciò $t_\sigma = 12^h$).

L'angolo calcolato con la [3.6], comunque, viene sottoposto al controllo per la *giusta direzione* con l'equivalente "polare" della [3.3] (inalterata, nonostante la semplificazione della [3.1]),

$$\boxed{d<0°}\ \boxed{P'_\sigma = -P_\sigma},$$

che perciò, come nel caso generale, porta i valori a spaziare nell'ambito $-180° \leqslant P_\sigma \leqslant +180°$.

Infine da P_σ si ottiene t_σ con la [3.4],

$$\boxed{t_\sigma = \frac{180° + P_\sigma}{15}},$$

che dà, come nel caso generale, $0^h \leqslant t_\sigma \leqslant 24^h$.

Orologio equatoriale

Concettualmente P_σ rappresenta la differenza angolare tra il piano meridiano locale ed il piano "polare-sustilare".

Ma in un orologio equatoriale, quando $\varepsilon = \pm 90°$, cioè quando $\left(i=+90°,\ \varphi=\pm 90°\right)$, o quando $\left(i=\varphi,\ d=180°\right)$, o quando $\left(i=-\varphi,\ d=0°\right)$, mancando per sua natura una vera sustilare, viene a mancare un piano polare "certo" perpendicolare al quadro: allora, come per la sustilare (vedi a pag. 31), per la quale si sceglie convenzionalmente una linea oraria che ne faccia le veci, così per calcolare P_σ si considera come piano polare perpendicolare al quadro proprio il piano allineato con la pseudo-sustilare, che non è altro che il piano meridiano, con la conseguenza di fissare convenzionalmente il valore di P_σ a $0°$, e l'ora sustilare t_σ alle 12^h (né più né meno come in un orologio orizzontale, caso già visto a pag. 38). E questo vale in ogni caso, per qualsiasi orologio equatoriale, comunque e dovunque, anche al polo (e sia esso nord o sud).

Esempi

Un o. generico in cui P_σ esce già buono dall'arcocoseno:

Es.G.1 $\boxed{\varphi = -34.2365°,\ i = +1.3°,\ d = +117.2°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +72.8°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 16^h51^m$$

Un o. generico in cui l'angolo calcolato con la funzione necessita della correzione:

Es.G.4 $\boxed{\varphi = +43.0182°,\ i = -1.0°,\ d = -95.4°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +94.4° \times(-1) = -94.4°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 5^h42^m$$

Un o. generico particolare in cui l'ora sustilare (in anticipo di 6^h sul mezzodì) va corretta:

Es.G.6 $\boxed{\varphi = -11.8024°,\ i = +9.3°,\ d = -38.4°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +90.0° \times(-1) = -90.0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 6^h00^m$$

In qualsiasi o. orizzontale l'ora sustilare coincide col mezzodì:

Es.O.2 $\boxed{\varphi = -52.6997°,\ i = +90°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = 0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 12^h00^m$$

Un o. verticale in cui P_σ necessita della correzione:

Es.V.5 $\boxed{\varphi = +42.8503°,\ i = 0°,\ d = -2.1°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +3.1° \times(-1) = -3.1°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 11^h48^m$$

Un o. verticale in cui P_σ esce dalla funzione col valore definitivo:

Es.V.6 $\boxed{\varphi = +42.8503°,\ i = 0°,\ d = +94.0°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +92.7°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 18^h 11^m$$

In quest'o. verticale l'ora sustilare (da P_σ già buono all'uscita dalla funzione), pur individuabile, non è mai raggiunta dall'ombra dello stilo, poiché ricade al di fuori dell'intervallo d'illuminazione del quadro (che va dalle $14^h 33^m$ alle $18^h 57^m$):

Es.V.1 $\boxed{\varphi = -38.7855°,\ i = 0°,\ d = +22.1°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +147.0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 21^h 48^m$$

Un o. polare in cui P_σ esce dalla funzione col valore definitivo:

Es.P.6 $\boxed{\varphi = +56.0604°,\ i = +6.6°,\ d = +80.1°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +78.1°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 17^h 12^m$$

O. polare-orizzontale (all'equatore) in cui P_σ esce già buono dall'arcocoseno, ed in cui l'ora sustilare coincide col mezzodì:

Es.P.3 $\boxed{\varphi = 0°,\ i = +90°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = 0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 12^h 00^m$$

Un o. polare-verticale (declinante ad est), che necessita della correzione all'uscita dalla funzione:

Es.P.4 $\boxed{\varphi = -11.0985°,\ i = 0°,\ d = -90°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = +90.0° \times (-1)$$
$$= -90.0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 6^h 00^m$$

Un o. polare-verticale al polo, in cui l'ora sustilare è sempre il mezzodì:

Es.P.2 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = 0°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = 0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 12^h 00^m$$

In qualsiasi o. equatoriale l'ora sustilare convenzionalmente coincide col mezzodì:

Es.E.1 $\boxed{\varphi = -90°,\ i = +90°}$

$$\Rightarrow P_\sigma = 0°$$
$$\Rightarrow t_\sigma = 12^h 00^m$$

Es.E.3 $\boxed{\varphi = +58.0832°,\ i = -58.0832°,\ d = 0°}$

$\Rightarrow P_\sigma = 0°$
$\Rightarrow t_\sigma = 12^h 00^m$

Cap. IV – Gli angoli ω delle linee orarie

Formule

L'orientamento sul quadrante di ciascuna semiretta oraria t viene stabilito dall'angolo ω in funzione del ritardo o dell'anticipo[67] dell'ora[68] in questione rispetto all'ora sustilare ($\Delta_t = t - t_\sigma$), e dell'elevazione dello stilo dal quadro.

Considerando il triangolo sferico in cui sia

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 90^\circ \\ \gamma = \Delta_t \\ b = \varepsilon \\ c = \omega \end{array}},$$

si ha (dalle [0.2] e dalle [0.4])

$$\boxed{\tan c = \sin b \cdot \tan \gamma},$$

cioè

$$\boxed{\omega = \arctan\left(\sin \varepsilon \cdot \tan \Delta_t\right)}^{69}. \qquad [4.1]$$

Essendo dato per tangente, viene sempre, con la funzione inversa *standard*, $-90^\circ < \omega < +90^\circ$: i $\pm 90^\circ$ non sono direttamente calcolabili con la funzio-

[67] Per questo motivo, cioè in considerazione del modo di calcolare e definire le linee orarie (appunto come *anticipi* o *ritardi relativi* ad un riferimento, più che come *istanti assoluti*) si sceglie in questa trattazione d'indicare le ore tramite la notazione con gli apici ^{h} e ^{m} (normalmente usata per esprimere *durate* di fenomeni), anziché col separatore : (di solito più indicato per esprimere *istanti* puntuali). Ad esempio, si scriverà 7^h30^m per indicare l'istante, la linea oraria, invece di scrivere 7:30.

[68] Sia chiaro che parlando di *ora* ci si riferisce ovviamente all'*istante*, non necessariamente all'*ora intera*: così si considerano *ore* non solo, ad esempio, le 11^h00^m, ma anche le 12^h08^m, le 19^h23^m ecc.

[69] Naturalmente l'intervallo di tempo Δ_t usato nei calcoli con le funzioni va espresso come angolo, convertendolo in gradi (moltiplicando le ore per 15).

ne[70], mentre gli $0°$ sono raggiunti quando l'uno o l'altro fattore dell'argomento della [4.1] si annullano, cioè quando, evidentemente, l'ora cercata è proprio la sustilare ($t = t_\sigma$) o la sua opposta ($t = t_\sigma \pm 12^h$), oppure quando $\varepsilon = 0°$ (caso, però, dell'orologio polare, trattato a pag. 46).

Considerazioni

Concettualmente gli angoli delle linee orarie possono assumere qualsiasi orientamento, qualsiasi direzione e verso, cioè valere tra 0° e 360°. La classica funzione trigonometrica inversa *arcotangente*, invece, come sappiamo, considera solo una metà degli angoli possibili, cioè fornisce solo valori compresi tra $-90°$ e $+90°$.
Per allargare all'intera circonferenza goniometrica l'intervallo dei valori possibili per gli angoli calcolati con l'arcotangente, ricorriamo quindi alla [0.7].
La [0.7] considera una frazione ed il suo *denominatore*: ora, sebbene nell'argomento della [4.1] non compaia alcuna frazione, quindi nessun denominatore, è del tutto lecito trascriverla nella forma

$$\omega = \arctan\left(\frac{\sin\varepsilon \cdot \sin\Delta_t}{\cos\Delta_t}\right),$$

non tanto per utilizzarla nel calcolo, quanto per evidenziare l'applicabilità del controllo:

$\cos\Delta_t < 0$	$\omega' = \omega + 180°$

,

70 Sebbene raggiungibili da ω quand'è, rispettivamente, $\Delta_t = \pm 6^h = \pm 90°$, come spieghiamo più avanti (non essendoci pericolo d'incappare nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$, essendo il caso $\varepsilon = 0°$ trattato a pag. 46, come orologio polare).

cioè

$$\boxed{6^h < |\Delta_t| \leqslant 12^h} \boxed{\omega' = \omega + 180°}$$ [71]; [4.2]

questo porta l'intervallo dei valori possibili per gli angoli delle linee orarie all'àmbito $-90° < \omega < +90° < \omega < +270°$.
Come già accennato, quando $\Delta_t = \pm 6^h$, allora ω raggiunge i valori $\pm 90°$, calcolabili, già corretti, secondo la formula $\boxed{\omega = 90° \cdot \operatorname{sgn}\varepsilon \cdot \operatorname{sgn}\Delta_t}$.
Concludendo, perciò, l'intervallo dei valori possibili per gli angoli ω delle linee orarie diventa $-90° \leqslant \omega \leqslant +270°$.

Casi particolari

Orologio orizzontale

Vale il caso generale[72].

Orologio verticale

Come sopra[73].

Orologio polare

Visto il parallelismo dello stilo al quadro, calcolare ω con la [4.1] non servirebbe a granché: otterremmo, giustamente ed ovviamente, $\omega = 0°$, di apprendere cioè che tutte le linee orarie sono parallele alla sustilare, ma senza sapere dove tracciarle; ciò che bisognerebbe calcolare, invece, sarebbe la di-

---

71 Purchè si esprima Δ_t comprendendolo sempre tra -12^h e $+12^h$ (cioè tra mezza giornata d'anticipo e mezza di ritardo rispetto all'ora sustilare), e non tra altri estremi, come, ad esempio, tra 0^h e $+24^h$. In questi casi, infatti, l'istante, ad esempio, in anticipo di 9 ore sull'ora sustilare, anziché essere espresso come -9^h, e soddisfare la condizione e quindi la verifica, verrebbe espresso come 15^h, non soddisfacendo né l'una né, quindi, l'altra. (In caso di dubbio, allora, meglio effettuare la verifica mantenendo il coseno e controllandone il segno.)

72 Sebbene si possa "semplificare" la [4.1] in $\omega = \arctan(\sin\varphi \cdot \tan\Delta_t)$, occorre procedere nello stesso modo.

73 Anche "semplificando" la [4.1] in $\omega = \arctan(-\cos\varphi \cdot \cos d \cdot \tan\Delta_t)$, occorre procedere in modo analogo.

stribuzione delle linee orarie sulla superficie del quadrante, la distanza di ciascuna dalla sustilare.
Per ottenere ciò, bisogna adottare un altro approccio, occorre introdurre una nuova grandezza: la distanza g dello stilo dal quadro.
La distanza di ciascuna retta oraria dalla sustilare è allora

$$\boxed{D = g \cdot \tan \Delta_t};$$

il segno di D è naturalmente quello di Δ_t[74], essendo g sempre positivo, perciò le distanze negative si riferiscono alle linee orarie che precedono l'ora sustilare, quelle positive a quelle che la seguono; allora, guardando la sustilare in modo da tenere la sua estremità nord[75] verso l'alto della visuale, le distanze negative (ore precedenti) si sviluppano a sinistra, le positive (ore seguenti) a destra.
In definitiva l'àmbito di variabilità per le distanze delle linee orarie dalla sustilare è $-\infty < D < +\infty$.

Orologio equatoriale

Dalla formula generale, e con $\varepsilon = \pm 90°$ (rispettivamente, quadro nord o quadro sud), avremmo

$$\boxed{\omega = \arctan\left(\pm \tan \Delta_t\right)},$$

che, col controllo [4.2],

$$\boxed{6^h < \left|\Delta_t\right| \leqslant 12^h} \; \boxed{\omega' = \omega + 180°},$$

---

[74] A rigore dovrebbe essere quello di $\tan \Delta_t$, a causa delle possibilità teorica che i rispettivi segni differiscano, quando, ad esempio, Δ_t superasse i $+90°$ (o le 6^h), e perciò, pur rimanendo positivo, la sua tangente da positiva diventasse negativa; questo però, in pratica, non si verifica mai, poiché in un orologio polare le ore utili si mantengono sempre entro le 6^h dalla sustilare.
Quindi essendo sempre $\left|\Delta_t\right| < 6^h$, Δ_t e la sua tangente mantengono sempre lo stesso segno, positivo o negativo che sia (o nullo, caso "inutile" della sustilare).
[75] Ricordiamo che parliamo di una sustilare parallela allo stilo e quindi all'asse polare terrestre, e che perciò punta le proprie estremità verso i poli celesti.

darebbe in sostanza, rispettivamente,

$$\boxed{\omega = \pm\Delta_t},$$

cioè

$$\boxed{\omega = \operatorname{sgn}(\varepsilon)\cdot\Delta_t};$$

questo risultato analitico conferma quello "empirico", cioè l'impostazione che, com'è noto, contraddistingue gli orologi equatoriali, secondo cui le linee (corrispondenti alle ore intere) sono distribuite ogni 15°, e seguono il senso orario nei quadranti nord e quello antiorario nei quadranti sud.
Essendo come sustilare adottata convenzionalmente la linea delle 12^h (la *meridiana*), ed andando le ore (teoriche) dell'orologio da 0^h a 24^h, ne consegue che l'ambito delle differenze angolo-orarie che alla sustilare fanno riferimento sarà $-180° \leqslant \omega \leqslant +180°$.

Esempi

In quest'o. generico due esempi di linee orarie, l'intera immediatamente precedente (le 16^h) e quella immediatamente seguente (le 17^h) l'ora sustilare, entrambe col valore di ω buono già all'uscita dall'arcotangente:

Es.G.1 $\boxed{\varphi = -34.2365°,\ i = +1.3°,\ d = +117.2°}$

$$\Rightarrow t_\sigma = 16^h51^m$$
$$\Rightarrow \omega_{16^h} = -4.73°$$
$$\Rightarrow \omega_{17^h} = +0.82°$$

Nello stesso o. generico appena visto calcoliamo come ora comune un'ora particolare come la meridiana (ovviamente esente da verifiche):

Es.G.1 $\boxed{\varphi = -34.2365°,\ i = +1.3°,\ d = +117.2°}$

$$\Rightarrow t_\sigma = 16^h51^m$$
$$\Rightarrow \omega_{12^h} = -49.64°$$

Se, in un o. generico, l'ora cercata "dista" oltre 6^h dalla sustilare, è necessaria una correzione:

Es.G.1 $\boxed{\varphi = -34.2365°,\ i = +1.3°,\ d = +117.2°}$

$$\Rightarrow t_\sigma = 16^h 51^m$$

$$\Rightarrow \omega_{10^h 30^m} = +75.83° \\ +180° \\ = +255.83°$$

Se, in un o. generico, l'ora cercata "dista" esattamente 6^h dalla sustilare, ω vale ±90° (secondo i casi):

Es.G.1 $\boxed{\varphi = -34.2365°,\ i = +1.3°,\ d = +117.2°}$

$$\Rightarrow t_\sigma = 16^h 51^m$$

$$\Rightarrow \omega_{10^h 51^m} = -90.00°$$

Negli oo. polari è la distanza dalla sustilare a definire la posizione delle linee orarie, in funzione, oltre che dell'ora, della distanza dello stilo dal quadro:

Es.P.6 $\boxed{\varphi = +56.0604°, i = +6.6°, d = +80.1°, g = 100}$

$$\Rightarrow t_\sigma = 17^h 12^m$$

$$\Rightarrow D_{13^h} = -197.3$$

$$\Rightarrow D_{18^h} = +21.0$$

Ecco l'o. equatoriale, il più elementare di tutti:

Es.E.3 $\boxed{\varphi = +58.0832°,\ i = -58.0832°,\ d = 0°}$

$$\Rightarrow t_\sigma = 12^h 00^m$$

$$\Rightarrow \omega_{8^h 00^m} = +60.00°$$

$$\Rightarrow \omega_{14^h 30^m} = -37.50°$$

Appendice

Tipologie

Riepiloghiamo qui di seguito i casi particolari di orologio, secondo il criterio dell'orientamento del quadro:

<table>
<tr><td colspan="3">$\mathrm{i} = +90°$</td><td>O. orizzontale</td><td rowspan="4">Casi particolari</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\mathrm{i} = 0°$</td><td>O. verticale</td></tr>
<tr><td>$\cos \mathrm{d} - \tan \varphi \cdot \tan \mathrm{i} = 0$</td><td>$\begin{cases} \mathrm{i} = 0° \\ \varphi = \pm 90° \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} \mathrm{i} = +90° \\ \varphi = 0° \end{cases}$</td><td>O. polare</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} \mathrm{i} = +90° \\ \varphi = \pm 90° \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} \mathrm{i} = \varphi \\ \mathrm{d} = 180° \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} \mathrm{i} = -\varphi \\ \mathrm{d} = 0° \end{cases}$</td><td>O. equatoriale</td></tr>
</table>

Si ricordi che in caso di identità *multipla* si considera la tipologia elencata più *in basso* nella tabella (ad esempio, un orologio *verticale-polare* viene calcolato come *polare*).
È utile considerare che le particolarità nell'orientamento del quadro, oltre che rilevabili da uno stato di fatto, come la posizione di una parete, quindi acquisibili "passivamente", possono al contrario essere imposte, diventando per così dire "attive", adattando una variabile per volta, in funzione delle altre due. È evidente come sia immediato impostare l'orizzontalità o la verticalità del quadro (imponendo i valori +90° o 0°, rispettivamente, all'inclinazione), ma non appare altrettanto immediato impostare la polarità o l'equatorialità.
Ad esempio, si potrebbe voler costruire un orologio polare appoggiando un piano inclinato alla base di un muro esistente, dovendo perciò calcolare la giusta inclinazione da imporre al quadro, essendo note e fisse la declinazione e la latitudine.

Ecco perciò che può tornare utile una seconda tabella, per così dire *inversa* della precedente, attraverso la quale, per ciascuno dei 4 orientamenti particolari da imporre al quadro, ricavare i giusti valori da assegnare ad i e/o d (non considerando il calcolo di φ, non ritenendola variabile):

<table>
<tr><td colspan="4">O. orizzontale</td><td>$i = +90°$</td></tr>
<tr><td colspan="4">O. verticale</td><td>$i = 0°$</td></tr>
<tr><td rowspan="9">O. polare</td><td rowspan="4">nota d</td><td rowspan="2">$\varphi = 0°$</td><td>$|d| \neq 90°$</td><td>$i = +90°$</td></tr>
<tr><td>$|d| = 90°$</td><td>$i = \text{ind.}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$|\varphi| = 90°$</td><td>$i = 0°$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$0° < |\varphi| < 90°$</td><td>$i = \arctan \dfrac{\cos d}{\tan \varphi}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">nota i</td><td colspan="2">$\begin{cases} i = +90° \\ \varphi \neq 0° \end{cases}$ o $\begin{cases} |\varphi| = 90° \\ i \neq 0° \end{cases}$</td><td>polarità impossibile</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} i = +90° \\ \varphi = 0° \end{cases}$ o $\begin{cases} |\varphi| = 90° \\ i = 0° \end{cases}$</td><td>$d = \text{ind.}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} i = 0° \\ |\varphi| \neq 90° \end{cases}$ o $\begin{cases} \varphi = 0° \\ i \neq +90° \end{cases}$</td><td>$d = \pm 90°$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\begin{cases} 0° < |i| < 90° \\ 0° < |\varphi| < 90° \end{cases}$</td><td>$|\tan i \cdot \tan \varphi| > 1$</td><td>polarità impossibile</td></tr>
<tr><td>$|\tan i \cdot \tan \varphi| \leqslant 1$</td><td>$d = \arccos(\tan i \cdot \tan \varphi)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">O. equatoriale</td><td colspan="3">$|\varphi| = 90°$</td><td>$i = +90°$</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">$|\varphi| \neq 90°$</td><td>$i = \varphi,\ d = 180°$</td></tr>
<tr><td>$i = -\varphi,\ d = 0°$</td></tr>
</table>

Ad esempio, per impostare un orologio polare all'equatore ($\varphi = 0°$), conoscendo $|d| \neq 90°$, porre $i = +90°$.

O ancora, per impostare un orologio polare alle nostre latitudini ($0° < |\varphi| < 90°$), essendo $0° < |i| < 90°$, ed essendosi accertati che $|\tan i \cdot \tan \varphi| \leqslant 1$, basta calcolare $\boxed{d = \arccos(\tan i \cdot \tan \varphi)}$.

Esaminando più da vicino la casistica, si noti la formula $\boxed{i = \arctan\dfrac{\cos d}{\tan\varphi}}$, per calcolare l'inclinazione di un orologio polare, nota la declinazione; ebbene, in questo caso la funzione arcotangente va applicata nella sua versione *standard*, senza cioè considerare la correzione [0.7].
Il motivo di questo trattamento è evidente: basta ricordare, infatti, che l'angolo che si sta cercando, l'inclinazione, per sua natura deve sempre essere $-90° < i \leqslant +90°$ (vedi anche la nota 6), cioè deve sempre cadere nel I o nel IV quadrante, quindi proprio come scaturisce dalla funzione arcotangente *standard*, senza perciò bisogno di eventuali correzioni (che, anzi, se applicate per considerare anche gli altri due quadranti, rischierebbero di falsare i risultati).
Un'annotazione, poi, sui casi indeterminati e su quelli impossibili.
Il caso di inclinazione indeterminata, che scaturirebbe dal tentare di impostare la polarità di un quadro di declinazione nota applicando la formula generale $\boxed{i = \arctan\dfrac{\cos d}{\tan\varphi}}$ con $\varphi = 0°$ e $d = \pm 90°$, diventando $\boxed{i = \arctan\dfrac{0}{0}}$, significa sia che *non si può* determinare il valore di i, sia che *non c'è bisogno* di determinarlo, potendo esso assumere *qualunque* valore: è evidente infatti che affinché un quadro sia polare sull'equatore, basta che declini ad est o ad ovest, *senza che importi il valore della sua inclinazione*.
Analogamente, sempre ricercando la polarità di un quadro, ma di cui invece sia nota l'inclinazione, sia che ci si trovi sull'equatore con un quadro orizzontale, sia ai poli con un quadro verticale, la declinazione non ha importanza, come scaturirebbe inserendo i rispettivi valori nella formula generale $\boxed{d = \arccos(\tan i \cdot \tan\varphi)}$, che infatti porterebbe comunque al caso indeterminato $0 \cdot \infty$, non risolvibile.
In particolare, si può aggiungere che nel primo caso, in un orologio orizzontale, la declinazione perde significato, potendo perciò *virtualmente* assumere qualsiasi valore, mentre nel secondo caso, ai poli, basta che l'orologio sia verticale, senza che sia importante il valore della declinazione[76].

[76] Anche se, per la convenzione [0.1], ricordiamo che la declinazione ai poli assume i valori $0° | 180°$.

Infine ci sono casi in cui, sempre cercando la polarità del quadro e sempre in funzione della latitudine e dell'inclinazione, risulta impossibile ricavare un valore per la declinazione.
I due (o tre, distinguendo i poli…) casi più ovvi sono quelli del quadro orizzontale fuori dall'equatore, che non può mai essere polare, così come non può essere polare un quadro inclinato ai poli.
C'è infine tutt'un'altra categoria di casi in cui, a latitudini intermedie, può risultare impossibile rendere polare un quadro di inclinazione data, pur orientandolo in tutti i modi, senza che esista una declinazione che soddisfi la condizione cercata: sono evidentemente i casi in cui $|\tan i \cdot \tan \varphi| > 1$[77], che ovviamente rendono impossibile calcolare la funzione arcocoseno, essendone l'argomento stesso oltre il limite concepibile.

Formule

Nelle tabelle seguenti sono riepilogate tutte le procedure di calcolo fin qui trattate. L'approccio può essere duplice: lungo ciascuna riga, corrispondente ad una tipologia di orologio, sono date le formule per calcolare le incognite (ε, σ ecc.) che definiscono quell'orologio; lungo ciascuna colonna, corrispondente ad un'incognita, invece, si indicano le diverse procedure per calcolare quell'incognita caso per caso (o. generico, o. orizzontale ecc.).
Per ogni procedura vengono illustrate condizioni da verificare, formule da applicare di conseguenza ed àmbito dei risultati ottenibili.

[77] Quelli cioè in cui $|i| + |\varphi| > 90°$.

	L’elevazione ε dello stilo	L’angolo sustilare σ
Orologio **_generico_**	$\varepsilon = \arcsin(\sin i \cdot \sin\varphi - \cos i \cdot \cos\varphi \cdot \cos d)$ ↳ $-90^\circ < \varepsilon < 0^\circ < \varepsilon < +90^\circ$	$\sigma = \arccos\left(\dfrac{\sin\varphi - \sin i \cdot \sin\varepsilon}{\cos i \cdot \cos\varepsilon}\right)$, e se $d < 0^\circ$, allora $\sigma' = -\sigma$, e se $\varepsilon < 0^\circ$, allora $\sigma' = \sigma + 180^\circ$ ↳ $-180^\circ \leqslant \sigma \leqslant +180^\circ$
Orologio **_orizzontale_**	$\varepsilon = \varphi$ ↳ $-90^\circ < \varepsilon < 0^\circ < \varepsilon < +90^\circ$	$\sigma = \arccos(\mathrm{sgn}\,\varphi)$ ↳ $\sigma = 0^\circ \vert 180^\circ$
Orologio **_verticale_**	$\varepsilon = \arcsin(-\cos\varphi \cdot \cos d)$ ↳ $-90^\circ < \varepsilon < 0^\circ < \varepsilon < +90^\circ$	$\sigma = \arccos\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon}\right)$, e se $d < 0^\circ$, allora $\sigma' = -\sigma$, e se $\lvert d \rvert < 90^\circ$, allora $\sigma' = \sigma + 180^\circ$ ↳ $-180^\circ \leqslant \sigma \leqslant +180^\circ$
Orologio **_polare_**	$\varepsilon = 0^\circ$	se $i \neq +90^\circ$, allora $\sigma = \arccos\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos i}\right)$, e se $d < 0^\circ$, allora $\sigma' = -\sigma$ ↳ $-180^\circ \leqslant \sigma \leqslant +180^\circ$ se $i = +90^\circ$, allora $\sigma = 0^\circ$ ↳ $\sigma = 0^\circ$
Orologio **_equatoriale_**	se $\lvert\varphi\rvert \neq 90^\circ$, allora $\varepsilon = -90^\circ \cdot \mathrm{sgn}(\cos d)$ se $\varphi = \pm 90^\circ$, allora $\varepsilon = \varphi$ ↳ $\varepsilon = \pm 90^\circ$	$\sigma = 2 \cdot \arcsin(\mathrm{sgn}(90^\circ - \varphi))$ ↳ $\sigma = 0^\circ \mid 180^\circ$

	L'angolo P_σ al polo	L'ora sustilare t_σ	Gli angoli ω delle linee orarie t ($\Delta_t = t - t_\sigma$)
Orologio *generico*	se $\lvert\varphi\rvert \neq 90^\circ$, allora $P_\sigma = \arccos\left(\frac{\sin i - \sin\varphi \cdot \sin\varepsilon}{\cos\varphi \cdot \cos\varepsilon}\right)$, e se $d < 0^\circ$, allora $P'_\sigma = -P_\sigma$ se $\varphi = \pm 90^\circ$, allora $P_\sigma = 0^\circ$ $\hookrightarrow -180^\circ \leqslant P_\sigma \leqslant +180^\circ$	$t_\sigma = \frac{180^\circ + P_\sigma}{15}$ $\hookrightarrow 0^h \leqslant t_\sigma \leqslant 24^h$	se $\lvert\Delta_t\rvert \neq 6^h$, allora $\omega = \arctan(\sin\varepsilon \cdot \tan\Delta_t)$, e se $6^h < \lvert\Delta_t\rvert \leqslant 12^h$, allora $\omega' = \omega + 180^\circ$ se $\Delta_t = \pm 6^h$, allora $\omega = 90^\circ \cdot \mathrm{sgn}(\varepsilon) \cdot \mathrm{sgn}(\Delta_t)$ $\hookrightarrow -90^\circ \leqslant \omega \leqslant +270^\circ$
Orologio *orizzontale*	$P_\sigma = 0^\circ$	$t_\sigma = 12^h$	come l'orologio generico
Orologio *verticale*	$P_\sigma = \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\varepsilon)$, e se $d < 0^\circ$, allora $P'_\sigma = -P_\sigma$ $\hookrightarrow -180^\circ \leqslant P_\sigma \leqslant +180^\circ$	$t_\sigma = \frac{180^\circ + P_\sigma}{15}$ $\hookrightarrow 0^h \leqslant t_\sigma \leqslant 24^h$	come l'orologio generico
Orologio *polare*	se $\lvert\varphi\rvert \neq 90^\circ$, allora $P_\sigma = \arccos\left(\frac{\sin i}{\cos\varphi}\right)$, e se $d < 0^\circ$, allora $P'_\sigma = -P_\sigma$ se $\varphi = \pm 90^\circ$, allora $P_\sigma = 0^\circ$ $\hookrightarrow -180^\circ \leqslant P_\sigma \leqslant +180^\circ$	$t_\sigma = \frac{180^\circ + P_\sigma}{15}$ $\hookrightarrow 0^h \leqslant t_\sigma \leqslant 24^h$	$D = g \cdot \tan\Delta_t$ $\hookrightarrow -\infty < D < +\infty$
Orologio *equatoriale*	$P_\sigma = 0^\circ$	$t_\sigma = 12^h$	$\omega = \mathrm{sgn}(\varepsilon) \cdot \Delta_t$ $\hookrightarrow -180^\circ \leqslant \omega \leqslant +180^\circ$

Peculiarità

Si tratta di caratteristiche o *comportamenti* degli orologi solari, generici o particolari che siano, che possono servire a controllare la bontà dell'impostazione del progetto e dell'esecuzione del calcolo, e che aiutano a comprendere la natura ed il funzionamento dei nostri affascinanti strumenti.

In un orologio ad ore locali...

- la retta oraria 6^h–18^h passa all'incrocio tra la linea d'orizzonte e la retta equinoziale.

In un orologio diretto (ma non equatoriale)...

- la sustilare coincide con la meridiana;
- la retta equinoziale è orizzontale.

In un orologio orizzontale...

- la declinazione perde significato;
- la linea verticale scompare;
- la linea d'orizzonte va all'infinito;
- la sustilare e la meridiana, coincidenti, sono allineate col meridiano e "puntano" al polo più vicino;
- la retta equinoziale è orientata in direzione est-ovest;
- l'elevazione dello stilo è uguale alla latitudine;
- a parità di latitudine il quadrante gode della maggior illuminazione durante tutto l'anno.

In un orologio verticale...

- -polare, che non sia al polo (quadro *meridiano*, $\mathrm{d} = \pm 90°$), la meridiana va all'infinito;
- la meridiana, se c'è, è verticale, e forma con lo stilo un angolo pari alla colatitudine;
- l'ortostilo è orizzontale;
- la linea d'orizzonte passa per il piede dello stilo (base dell'ortostilo).

In un orologio polare...

- -verticale, che non sia al polo (quadro *meridiano*, $\mathrm{d} = \pm 90°$), la meridiana va all'infinito;
- lo stilo è parallelo al quadro, alla distanza impostata come sua sporgenza (o lunghezza dell'ortostilo);
- le linee orarie moderne sono parallele tra loro (ed allo stilo);

- le curve diurne sono sempre iperboli;
- il piede dello stilo (base dell'ortostilo) sta sull'intersezione dell'equinoziale con la sustilare;
- il piede dello stilo (base dell'ortostilo) è centro dell'orologio (origine degli assi cartesiani);
- la "presenza" del Sole sul quadro dura sempre e dovunque 12^h.

In un orologio equatoriale...

- lo stilo (polare) è perpendicolare al quadro, e coincide con l'ortostilo;
- le linee orarie moderne sono "distanziate" tra loro di 15°;
- le linee diurne sono archi di cerchio e l'equinoziale va all'infinito;
- se il quadro non è orizzontale, la meridiana è verticale, e "punta" verso il basso;
- se il quadro è orizzontale (al polo), l'asse coincide con l'antimeridiano *locale*;
- la sustilare degenera in un punto, alla base dello stilo, ed è sostituita, come asse del sistema polare, dalla meridiana.

In un orologio al polo...

- la declinazione (se il quadro non è orizzontale) si può considerare convenzionalmente di 0° al polo nord e di 180° al polo sud.

Bibliografia

Fantoni, Girolamo. *Orologi solari. Trattato completo di gnomonica.* Roma, Technimedia, 1988. 552 p.

Meeus, Jean. *Astronomia con il computer. Formule, metodi di calcolo, esempi numerici.* Milano, Hoepli, 1990. VIII, 232 p. ISBN 88-203-1771-0.

Meeus, Jean. *Astronomical algorithms.* 2ª ed. Richmond (Va., USA), Willmann-Bell, 1998. IV, 478 p. ISBN 0-943396-61-1.

Lamberti, Lamberto; Mereu, Laura; Nanni, Augusta. *Matematica.* Nuova edizione. Milano, Etas, 2000-2001. 3 vol. ISBN 88-451-7709-2, 88-451-3182-3, 88-451-3183-1.

Post nubila Phœbus